Formulario di Algebra Lineare I

1) Richiami di Analisi Matematica I.

1.1) Campo.

Struttura algebrica, avente due operazioni (**+** e **.**), che gode delle seguenti proprietà:

- Commutativa: x + y = y + x x * y = y * x
- Associativa: (x + y) + z = y + (x + z) (x * y) * z = x * (y * z)
- Distributiva della '**.**' rispetto alla '**+**' : (x + y) * z = zx + zy

e che possiede i seguenti elementi:

- Elemento neutro: x + **0** = x x * **1** = x
- Elemento opposto: x + (**-x**) = 0
- Elemento reciproco: x * (**1/x**) = 1

1.2) Tipi di campi o insiemi numerici.

- **N**: 1,2,3,4… → Naturali
- **Z**: …,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4… → Interi
- **Q**: 1/2, -1/3, 1/8, 1.$\overline{3}$,… → Razionali
- **R**: √2, √3/2, e, π,… → Reali
- **C**: 1+3i, 5√2-8i, … → Complessi
- **I** : 3i, 1/3i, √2i,… → Immaginari

NB: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C} \quad \wedge \quad \mathbf{I} \subset \mathbf{C}$

1.3) Numeri complessi.

Un numero complesso "Z=a+ib" è formato da una parte reale 'a' (a∈R) e da un parte immaginaria 'ib' (ib∈I).
In particolare i=√(-1), da ciò ne consegue che $i^2 = -1$, per cui **i** gode delle seguenti proprietà:

$i^{4n} = 1 \qquad i^{4n+1} = i \qquad i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n+3} = -i$

Dato il numero complesso "Z = a + ib" il suo coniugato è "$\overline{Z}$ = a – ib", mentre il reciproco è $Z^{-1} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

Operazioni tra numeri complessi:

- (a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)
- (a+ib) * (c+id) = (ac – bd) + i(ad+bc)

Forme dei numeri complessi:

- Z = a + ib → Forma algebrica
- Z = ρ (cosθ + i senθ) → Forma trigonometrica
- $Z = \rho e^{i * \theta}$ → Forma esponenziale

In particolare per analogia tra la forma algebrica e quella trigonometrica si ricava:

$\rho = \sqrt{(a^2 + b^2)} \qquad a = \rho * \cos\theta \qquad b = \rho * \sin\theta \qquad \theta = \mathrm{arctg}(-b/a)$

Usando la forma trigonometrica è molto più facile effettuare la moltiplicazione e la divisione tra due numeri complessi $Z_1 = a + ib = \rho_1(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ e $Z_2 = c + id = \rho_1(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$:

- $Z_1 Z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\alpha+\beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)]$ $\dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\alpha-\beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha-\beta)]$

Potenza e radice di Z:

Si risolvono tramite la formula di De Moivre:

- $Z^n = \rho^n (\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta))$
- $\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{\rho}\,(\cos[(\theta + 2k\pi)/n] + i\,\mathrm{sen}[(\theta + 2k\pi)/n]) \quad \wedge \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$

ne consegue che l'estrazione di radice su un numero Z genera n soluzioni

2) Matrici.

2.1) Definizioni.

Una matrice è un insieme di numeri organizzati in forma tabellare in 'm' righe ed 'n' colonne.
I numeri di cui è composta possono appartenere a **N**, **Z**, **Q**, **R** o **C** e sono detti *coefficienti* (o *entries*).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \wedge \begin{matrix} i = 0,1,2,3,\dots,m \\ j = 0,1,2,3,\dots,n \end{matrix}$$

Due modi per indicare una matrice generica $m x n$.

I numeri di coefficienti uguali (a_{ii}) formano la *diagonale principale* (cerchiata in figura).

2.1.1 Tipi di matrici.

I principali tipi di matrici sono:

- Se m=n la matrice è detta *quadrata*.
- Se n=1 la matrice è detta *colonna* (o vettore colonna)
- Se m=1 la matrice è detta *riga* (o vettore riga)
- Se ogni riga inizia/finisce con almeno un elemento nullo e la riga successiva inizia/finisce con più/meno elementi nulli della precedente allora la matrice è detta *trapezoidale superiore/inferiore*.

Es: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Trapezoidale superiore

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Trapezoidale inferiore

Esistono inoltre particolari tipi di matrici quadrate:

- Se $\forall i \neq j \rightarrow a_{ij} = 0$ la matrice è detta *diagonale*.

Es: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4i & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ gli elementi della diagonale possono anche essere 0.

- Se $\forall i \neq j \rightarrow a_{ij} = 0 \wedge a_{ij} = \alpha$ la matrice è detta *scalare*.

Es: $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

- Se gli elementi al di sopra/sotto della diagonale principale sono pari a 0 allora la matrice è detta *triangolare inferiore/superiore*.

Es: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4i & e \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ Triangolare superiore

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4i & 0 \\ e & 7 & \pi \end{pmatrix}$ Triangolare inferiore

NB: Per indicare gli elementi nulli o i possibili valori dei coefficienti che si trovano al di sopra/sotto della diagonale si usa anche la notazione seguente: $\begin{pmatrix} \diagdown & * \\ 0 & \diagdown \end{pmatrix}$

2.2) Operazioni con le matrici.

Supponendo A, B, C,… delle matrici e $\alpha, \beta, \gamma, ...$ degli scalari (numeri).

2.2.1 Prodotto per scalari.

Data la matrice $\underset{mxn}{A} = (a_{ij}) \rightarrow \alpha \underset{mxn}{A} = (\alpha * a_{ij})$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ 3 & -i \end{pmatrix} \wedge \alpha = i \rightarrow \alpha A = \begin{pmatrix} i-1 & 2i+1 \\ 3i & 1 \end{pmatrix}$

Proprietà:

- $1 * A = A$
- $0 * A = \Theta$ (matrice con elementi tutti nulli)
- $(\alpha\beta)A = (\alpha A)\beta$
- $-1 * A = (-a_{ij}) = -A$

2.2.2 Somma tra matrici.

La condizione necessaria per sommare delle matrici è che queste abbiano le stesse dimensioni.

$\underset{mxn}{A}(a_{ij}) + \underset{mxn}{B}(b_{ij}) = C(a_{ij} + b_{ij})$

Es: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

Proprietà (S=somma, p=prodotto per scalari):

- S1: A+(B+C)=(A+B)+C
- S2: A+B=B+A
- S3: A+Θ=A
- S4: A+(–A)= Θ
- pS1: α(A+B)= αA+αB
- pS2: (α+β)A=αA+βA

2.2.3 Prodotto tra matrici.

La condizione necessaria per sommare due matrici è che la prima abbia un numero di colonne pari al numero di righe della seconda.

$\underset{mxn}{A}(a_{ij}) * \underset{pxq}{B}(b_{ij}) = \underset{mxq}{C}(c_{ij}) \wedge c_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik} * b_{kj})$

Es: $(3 \quad 4) * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5$; $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 15 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

Proprietà (S=somma, P=prodotto, p=prodotto per scalari):

- P1: A(BC)=(AB)C
- P2: AΘ=Θ e ΘA=Θ
- P3: I_mA=A e A I_m=A
- PS1: A(B+C)=AB+AC
- PS2: (A+B)C=AC+BC
- Pp: α(AB)= (αA)B=A(αB)

NB: I_m è detta *matrice (quadrata mxm) identità* di ordine 'm' e si presenta nella forma $\begin{pmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & 1 & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{pmatrix}$, dove la diagonale principale ha tutti gli elementi pari ad uno e i rimanenti sono nulli.

2.3) Scrittura matriciale di un sistema lineare.

Dato il seguente sistema di equazioni:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ...... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$ 'm' equazioni ad 'n' incognite

ponendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ ... & & ... & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$$

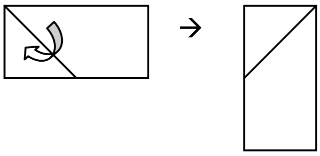
Matrice dei coefficienti — Vettore delle incognite — Vettore dei coefficienti

La scrittura $A * \underline{x} = \underline{b}$ è perfettamente equivalente al sistema di partenza.

2.4) Trasposte e H-trasposte (o Hermitiane).

La Trasposta e l'H-trasposta sono delle particolari operazioni che si fanno sulle matrici.

- La *trasposta* $\underset{nxm}{A^T}$ di una matrice $\underset{mxn}{A}$ si ottiene scambiando le righe con le colonne, cioè la matrice viene 'ribaltata' di 180° rispetto alla diagonale principale:



es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

- L'*H-trasposta* (o hermitiana-trasposta) $\underset{nxm}{A^H}$ di una matrice $\underset{mxn}{A}$ si ottiene complementando la rispettiva trasposta: $\underset{nxm}{A^H} = \overline{A^T}$.

es: $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & -3i \\ 4 & 5-2i & 6 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1+i & 4 \\ 2 & 5-2i \\ -3i & 6 \end{pmatrix} \rightarrow A^H = \begin{pmatrix} 1-i & 4 \\ 2 & 5+2i \\ 3i & 6 \end{pmatrix}$

Proprietà:

- $(\alpha A)^T = \alpha A^T \quad ; \quad (\alpha A)^H = \overline{\alpha} A^H$
- $(A+B)^T = A^T + B^T \quad ; \quad (A+B)^H = A^H + B^H$
- $(A^T)^T = A \quad ; \quad (A^H)^H = \overline{\left(\overline{A^T}\right)^T} = \left(\overline{\overline{A^T}}\right)^T = (A^T)^T = A$
- $(AB)^T = B^T A^T \quad ; \quad (AB)^H = B^H A^H$

2.4.1 Particolarità.

NB: Tutte le definizioni seguenti sottintendono che le matrici siano quadrate.

- Una matrice A è detta *simmetrica* se coincide con la sua trasposta A^T. Es: $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&0&7\\2&7&5\end{pmatrix}$.
- Una matrice A è detta *antisimmetrica* se coincide con la sua trasposta negativa $-A^T$ (quindi gli elementi della diagonale principale devono essere nulli). Es: $A=\begin{pmatrix}0&3&2\\-3&0&7\\-2&-7&0\end{pmatrix}$.
- Una matrice complessa A è detta *hermitiana* se coincide con la sua H-trasposta A^H (quindi gli elementi della diagonale principale devono essere dei numeri reali). Es: $A=\begin{pmatrix}2&2i&5-i\\-2i&0&7\\5+i&7&-3\end{pmatrix}$.
- Una matrice complessa A è detta *antihermitiana* se coincide con la sua H-trasposta negativa $-A^H$ (quindi $a_{ii}\in \mathrm{I}$). Es: $A=\begin{pmatrix}0&1+i&4\\-(1-i)&i&2i\\4&-(-2i)&-3i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1+i&4\\-1+i&i&2i\\4&2i&-3i\end{pmatrix}$.

2.4.2 Scomposizione di una matrice quadrata.

Ogni matrice nxn complessa A si scrive in uno ed un solo modo come A=B+C, con B hermitiana e C antihermitiana: $B=\frac{1}{2}(A+A^H)$ $\quad C=\frac{1}{2}(A-A^H)$.

2.5) Decomposizione a blocchi.

Le matrici possono essere suddivise in più blocchi, i quali saranno gli elementi di un'altra matrice concettualmente equivalente alla precedente:

$$\text{Es: } A=\left(\begin{array}{c|cc|c}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\\hline a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\end{pmatrix}\wedge \underset{1x1}{A_{11}}=(a_{11})\wedge \underset{1x2}{A_{12}}=(a_{12}\quad a_{13})\wedge ...$$

Si possono quindi effettuare operazioni su tali matrici decomposte a patto che ogni operazione sui blocchi risulti effettuabile:

$$\text{Es: } \underset{3x4}{A}=\left(\begin{array}{c|cc|c}1&2&3&1\\\hline 0&-1&0&-2\\3&0&1&2\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\end{pmatrix}\qquad \underset{4x2}{B}=\left(\begin{array}{c|c}2&0\\\hline -1&2\\0&-1\\\hline 3&-1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\\B_{31}&B_{32}\end{pmatrix}$$

$$A*B=\begin{pmatrix}\overset{1x1}{\left(\overset{1x1}{A_{11}B_{11}}+\overset{1x1}{A_{12}B_{21}}+\overset{1x1}{A_{13}B_{31}}\right)} & \overset{1x1}{\left(\overset{1x1}{A_{11}B_{12}}+\overset{1x1}{A_{12}B_{22}}+\overset{1x1}{A_{13}B_{32}}\right)}\\ \underset{2x1}{\left(\underset{2x1}{A_{21}B_{11}}+\underset{2x1}{A_{22}B_{21}}+\underset{2x1}{A_{23}B_{31}}\right)} & \underset{2x1}{\left(\underset{2x1}{A_{21}B_{12}}+\underset{2x1}{A_{22}B_{22}}+\underset{2x1}{A_{23}B_{32}}\right)}\end{pmatrix}$$

2.6) Risoluzione di sistemi lineari.

Dato un sistema di ‘m’ equazioni ad ‘n’ incognite, grazie alle matrici esiste un metodo per trovare via via dei sistemi più semplici che portano ad una sua più facile risoluzione (*metodo di riduzione di Gauss*).
Le regole fondamentali del processo di riduzione sono:

- scambio di posto tra due equazioni
- moltiplicazione di un’equazione per un $\alpha \in R-\{0\}$
- sostituzione di un’equazione con un’altra pari alla somma della stessa con un’altra ancora ($y_1=y_1+y_2$)

Lo scopo è quello di realizzare una matrice trapezoidale superiore nella quale il primo elemento di ogni riga sia ‘1’, per farlo basta operare in modo analogo all’esempio seguente:

1) Prima di tutto bisogna scrivere la matrice ampliata dei coefficienti che si ottiene aggiungendo a destra anche la colonna dei termini noti	$\begin{cases} 2x_1+6x_2+3x_3=4 \\ -2x_2+\frac{1}{2}x_3=1 \\ -x_1+x_2-\frac{1}{2}x_3=\frac{2}{5} \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$
2) Si scambiano le equazioni in modo che la matrice assomigli il più possibile ad una matrice trapezoidale superiore.	$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$
3) Si porta ad ‘1’ il primo coefficiente della prima equazione, dopo di che quest’ultima non verrà più toccata. Es: Si moltiplica per ½ la 1° equazione.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$
4) Passiamo alla 2° equazione, ora bisogna portare a ‘0’ il primo elemento ed a ‘1’ il secondo. Es: - sommo alla 2° la 1°, e la rimpiazzo col risultato: 0 4 2 12/5 - poi moltiplico la 2° così ottenuta per ¼	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$
5) Passiamo alla 3° equazione, ora bisogna portare a ‘0’ il secondo elemento ed a ‘1’ il terzo Es: - sommo alla 3° la 2° moltiplicata per 2, e la rimpiazzo col risultato: 0 0 3/2 11/5 - poi moltiplico la 3° così ottenuta per 2/3	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{22}{15} \end{pmatrix}$

6) Ora la risoluzione del sistema è banale, esso prevede una sola soluzione; se arrivando all’ultima equazione si ha più di una variabile, il sistema va risolto parametrizzando tali variabili (es: $x_1=k$, $x_2=p$, $x_3=t$, …) e si dice che questo ha “infinito alla n soluzioni” (∞^n), dove ‘n’ rappresenta il numero di parametri. Un sistema inoltre può avere anche 0 soluzioni e questo accade quando l’ultima colonna è *dominante*.
NB: Una colonna è detta dominante se è in corrispondenza del primo elemento non nullo di una riga. Nell’esempio le colonne dominanti sono: la 1°, la 2° e la 3°.

2.7) Matrici inverse.

- Data una matrice A è detta *inversa destra* R di A quella matrice tale che A*R=I.
- Data una matrice A è detta *inversa sinistra* L di A quella matrice tale che L*A=I.
- Data una matrice A è detta *inversa (bilatera)* X di A quella matrice tale che A*X=X*A=I.

NB: Non sempre esistono le inverse di una matrice.

- Se una matrice ammette inversa destra R ed inversa sinistra L allora si ha che L=R.
  Dim: A_{mxn}, R_{nxm}, L_{nxm}, $AR=I_m$, $AL=I_n$ → $L=L\,I_m=L(AR)=(LA)R=I_nR=R$
- Dato il sistema $A\underline{x}=\underline{b}$ valgono le seguenti proprietà:
  1) Se A ha inversa destra R allora esiste almeno una soluzione
     Dim: $A(R\underline{b})=(AR)\underline{b}=I\underline{b}=\underline{b}$
  2) Se A ha inversa sinistra L allora esiste al più una soluzione
     Dim: $L(A\underline{v})=L\underline{b} \quad \rightarrow \quad (LA)\underline{v}=L\underline{b} \quad \rightarrow \quad I\underline{v}=L\underline{b} \quad \rightarrow \quad \underline{v}=L\underline{b}$
  3) Se A ha inversa allora esiste una sola soluzione
- Data $\underset{2x2}{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se Δ=ad–bc≠0, essa ammette inversa pari a $\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- Un vettore $\underline{v}^T \neq 0$ ha infinite inverse destre e nessuna inversa sinistra.

2.7.1 Rango.

Il *rango* rK(A) di una forma ridotta di Gauss di A_{mxn} è definito come il numero di righe diverse dal vettore riga $\underline{0}^T$.

2.7.2 Condizioni necessarie.

- Una matrice A_{mxn} ha inversa destra se e solo se rK(A)=m
- Una matrice A_{mxn} ha inversa sinistra se e solo se rK(A)=n
- Una matrice A_{nxn} ha inversa sinistra se e solo se ha inversa destra e rK(A)=n

NB: Se $rK(A)=rK(A^T)=n$ → $L\,A_{mxn}=I_n \Leftrightarrow (L\,A_{mxn})^T=I_n^T \Leftrightarrow L^T\,A_{mxn}^T=I_n$ (legame con le trasposte).

2.7.3 Algoritmo di Gauss-Jordan.

L'algoritmo di *Gauss-Jordan* permette, data una matrice A, di trovare la sua corrispettiva inversa. Si parte dalla matrice ampliata A e la si trasforma in quella pluriaumentata aggiungendo la matrice identità adatta alla sua destra: A_{nxn} → $A'=[\,A_{nxn} \mid I_n\,]$. Dopo di che si applica il metodo di riduzione di Gauss in modo tale da trasformare il blocco sinistro di A' nella matrice identità, il blocco destro sarà infine la matrice inversa cercata: $A'=[\,I_n \mid A^{-1}_{nxn}\,]$

2.7.4 Proprietà.

Siano A, B invertibili ed nxn:
1) A*B è invertibile e $(AB)^{-1}=B^{-1}*A^{-1}$
2) $(A^{-1})^{-1}=A$
3) A^T e A^H sono invertibili e $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ e $(A^H)^{-1}=(A^{-1})^H$

2.8) Matrici elementari.

Quando si applica il metodo di riduzione di Gauss non si fa altro che moltiplicare la matrice di partenza per della particolari matrici dette *elementari* ricavate dalla matrice identità.
Data una matrice A_{mxn} esiste una matrice elementare per ogni operazione fondamentale:

1) Moltiplicazione della i-esima riga per α:

$$\underset{mxm}{E_i}(\alpha) \wedge \alpha \neq 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \alpha & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \wedge a_{ii} = \alpha$$

2) Sostituzione della i-esima riga con la somma della j-esima moltiplicata per α:

$$\underset{mxm}{E_{ij}}(\alpha) \wedge \alpha \neq 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & \alpha & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \wedge a_{ji} = \alpha$$

NB: α si trova alle coordinate (j, i) ed è sotto all'elemento '1' di coordinate (i, i).

3) Scambio della riga i-esima con la j-esima:

$$\underset{mxm}{E_{ij}} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

NB: $a_{jj} = a_{ii} = 0$ e $a_{ij} = a_{ji} = 1$.

Le matrici elementari sono invertibili:

$E_i^{-1}(\alpha) = E_i(\alpha^{-1})$ $E_{ij}^{-1}(\alpha) = E_{ij}(-\alpha)$ $E_{ij}^{-1} = E_{ij} \Leftrightarrow E_{ij}^{2} = I$ (le prime due sono triangolari inferiori)

2.8.1 Scomposizione LU.

Quando si usa la scomposizione di Gauss su una matrice A, si effettua una fattorizzazione di A in un certo numero di matrici elementari più la matrice in forma ridotta di Gauss U:

$E_r * \dots * E_3 * E_2 * E_1 * A = U$ (E_n = generica matrice elementare)

il prodotto delle E_n è una matrice invertibile F, dalla quale si ha che:

$FA = U \Leftrightarrow A = F^{-1} * U = E_1^{-1} * E_2^{-1} * E_3^{-1} * \dots * E_r^{-1} * U = LU$ (L=lower, U=upper)

Alla fine della scomposizione di Gauss si può trovarsi in uno dei seguenti casi:

1° caso) Non ci sono matrici del tipo Eij.
- Il prodotto di una matrice triangolare inferiore/superiore è triangolare inferiore/superiore.
- l'inversa di una matrice triangolare inferiore/superiore è triangolare inferiore/superiore.

2° caso) Ci sono matrici del tipo Eij.