Formulario di Calcolo delle Probabilità I

1) Nozioni generali.

1.1) Definizioni.

Un *esperimento casuale o aleatorio* si ha quando il risultato non è prevedibile a priori (es: lancio del dado).
L'insieme dei possibili risultati o *spazio fondamentale* è detto Ω; i singoli risultati od *eventi elementari* si indicano con ω. (NB: $\omega \in \Omega$)
Un *evento* è un qualsiasi sottoinsieme di Ω (es: lancio del dado: ottengo numeri pari). NB: La probabilità non è esprimibile per tutti gli eventi.

Il numero di eventi elementari ω può essere:
- -Finito od un'infinità numerabile (es: le auto che passano in un dato giorno su una data strada).
- -Infinità continua (es: non è possibile esprimere la probabilità per tutti i possibili sottoinsiemi di Ω ma lo è per delle sue classi)

NB: la scrittura CARD(Ω)=N indica che lo spazio Ω contiene 'N' eventi elementari.

1.1.1 La sigma-algebra.

La sigma-algebra $\Im$ è la famiglia di sottoinsiemi di Ω dove la probabilità è definita, in particolare essa soddisfa le seguenti proprietà:

1) $\Omega \in \Im$ ($\Im$ contiene lo spazio fondamentale)
2) $\forall i \rightarrow (A_i)_{i=1,2,3\ldots} : A_i \in \Im \Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Im$
   Cioè $\Im$ deve contenere anche l'unione degli insiemi che essa contiene
3) A^C (A complementare) = $\{ \omega \in \Omega : \omega \notin A \} \wedge A \subseteq \Omega$
   Cioè se $A \in \Im \rightarrow A^C \in \Im$.
   La più piccola $\Im$ possibile è $\Im = \{\Omega, \varnothing\}$, mentre la più grande è $\Im = \mathcal{P}(\Omega)$
   NB: $\mathcal{P}(\Omega)$ indica tutti i possibili sottoinsiemi di Ω, ed è detto anche *insieme delle parti di* Ω.
   Se Ω ha 'N' elementi $\rightarrow \mathcal{P}(\Omega)=2^N$
4) $\Im$ è chiusa anche rispetto all'intersezione numerabile, cioè $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Im$

1.1.2 La funzione probabilità.

La probabilità è una funzione P definita in $\Im$ e ha valori compresi tra '0' ed '1': $P : \Im \rightarrow [0; 1]$.

Proprietà:
- $P(\Omega)=1$, $P(\varnothing)=0$
- la σ-additività implica l'additività semplice:
  se $\forall i \rightarrow (A_i)_{i=1,2,3\ldots} \in \Im$ e gli A_i sono a due a due disgiunti si ha che:
  $$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \ldots$$

Regole:
1) $P(A) = 1 - P(A^C)$ $\qquad A \cap A^C = \varnothing \quad \wedge \quad A \cup A^C = \Omega$
2) Con $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \leq P(B)$ si ha che:
   $B - A = B \cap A^C$ e $P(B-A) = P(B) - P(A)$
3) Dati $A,B \in \Im$ si ha che $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2) Calcolo combinatorio.

Esso studia gli insiemi di oggetti calcolando il numero totale di gruppi che si possono formare con questi.

2.1) Disposizioni.

Dati 'n' elementi diversi e fissato un numero intero positivo k≤n, si dicono disposizioni $_nD_k$ (o $D_{n,k}$) di 'n' elementi di classe 'k', i gruppi che si possono formare prendendo 'k' elementi dagli 'n' in modo tale che ogni gruppo differisca o per almeno un elemento o per l'ordine in cui gli elementi sono presi.

- Semplici o (senza ripetizione): $_nD_k = (n-0)(n-1)(n-2)......(n-(k-1)) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
- Con ripetizione: $_nD_k^{(r)} = n*n*n*...*n(\text{per k volte}) = n^k$

2.2) Permutazioni.

Si dicono permutazioni P_n di 'n' elementi i gruppi che si possono formare prendendo tutti gli 'n' elementi e scambiandoli tra loro in tutti i modi possibili. (NB: 1**!** = 1 e 0**!** = 1)

- Semplici (con 'n' elementi distinguibili): $P_n = {}_nD_n^{(r)} = (n-0)(n-1)(n-2)......(n-(n-1)) = n!$
- Con ripetizione (con 'i' elementi non distinguibili): $P_n^{(r)} = \dfrac{n!}{n_1!*n_2!*...*n_i!}$ e n_i = numero di elementi dello stesso tipo.

2.3) Combinazioni.

Dati 'n' elementi diversi e fissato un numero intero positivo k≤n, si dicono combinazioni $_nC_k$ (o $C_{n,k}$) di 'n' elementi di classe 'k', tutti i possibili gruppi che si possono formare prendendo 'k' elementi dagli 'n' in modo tale che ogni gruppo differisca dagli altri per almeno un elemento (nel caso con ripetizione conta anche il numero di volte che l'elemento appare).

- Semplici: $_nC_k = \dfrac{_nD_k}{P_k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} = \dbinom{n}{k}$
- Con ripetizione: $_nC_k^{(r)} = {}_{n+k-1}C_k = \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$

Le combinazioni sono spesso indicate come $\dbinom{n}{k}$ che si legge 'n su k' e viene detto combinatorio, tali quantità godono delle seguenti proprietà:

- $\dbinom{n}{0} = 1$; $\dbinom{n}{n} = 1$; $\dbinom{n}{1} = n$; $\dbinom{n}{k} = 0$ se k<0 oppure k>n
- $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$
- $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$

3) Variabili aleatorie.

3.1) Definizioni.

È detta *variabile aleatoria o casuale* una grandezza che, in seguito ad un certo esperimento, può assumere valori diversi in modo imprevedibile a priori.
Su ogni variabile aleatoria viene definita una funzione $\mathrm{P} : \Omega \to [0; 1]$ la quale si occupa di ripartire la probabilità totale '1' tra i diversi $\mathcal{P}(\Omega)$ secondo una *legge di distribuzione di probabilità* ben definita.

Da fare: distrib. binomiale, dormire, tramezzino bresaola, playstation, esercizi…