Esercizio 6.1. Siano $(y_1, \ldots, y_n)$ determinazioni indipendenti di una variabile casuale con distribuzione $N(0, \sigma^2)$ e $(x_1, \ldots, x_k)$ determinazioni indipendenti, tra di loro e dalle precedenti, di una variabile casuale con distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$.

1 Si verifichi l'ipotesi nulla $H_0 : \sigma^2 = 4$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \sigma^2 \neq 4$ con livello di significatività 0.1, utilizzando la distribuzione approssimata di $W_P(\sigma^2)$, con

$$y = (2.6, -2.4, 0.3, 3.7, 0.1, -4.0, -1.1, 0.2, -1.8, 2.7)$$

e

$$x = (-3.9, 5.0, -5.2, 0.5) \ .$$

2 Si calcoli un'approssimazione del livello di significatività osservato del test precedente.

3 Si determini un intervallo di confidenza per σ^2 con livello 0.99, basato sulla distribuzione approssimata di $W_P(\sigma^2)$.

4 Si verifichi l'ipotesi nulla $H_0 : \sigma^2 = 4$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \sigma^2 < 4$ con livello di significatività 0.1, utilizzando la distribuzione approssimata di $r_P(\sigma^2)$.

5 Si calcoli un'approssimazione del livello di significatività osservato del test precedente.

6 Si determini un intervallo di confidenza per σ^2 con livello 0.99, basato sulla distribuzione marginale approssimata dello stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\sigma}^2$.

Esercizio 6.2. Sia dato un campione causale semplice $(y_1, \ldots, y_{100})$ da una variabile casuale con distribuzione gamma con parametro (α, λ) e densità

$$p(y; \alpha, \lambda) = \lambda^\alpha y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} / \Gamma(\alpha) \ , \ y > 0 \ , \ \alpha, \lambda > 0 \ .$$

Si assuma che per il campione osservato si abbia $\sum_{i=1}^{100} y_i = 193.314$ e $\sum_{i=1}^{100} \log y_i = 38.8783$. La stima di massima verosimiglianza risulta $(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) = (2, 1.034)$.

1 Si verifichi l'ipotesi nulla $H_0 : \alpha = 1$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \alpha \neq 1$, utilizzando la distribuzione approssimata di $W_P(\alpha)$ e con livello fissato 0.05.

2 Si calcoli un'approssimazione del livello di significatività osservato del test al punto precedente.

3 Si ottenga un intervallo di confidenza per α con livello 0.90, utilizzando la distribuzione approssimata di $W_P(\alpha)$.

4 Si verifichi l'ipotesi nulla $H_0 : \alpha = 1$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \alpha > 1$, utilizzando la distribuzione approssimata di $r_P(\alpha)$ e con livello fissato 0.05.

5 Si calcoli un'approssimazione del livello di significatività osservato del test al punto precedente.

Esercizio 6.3. Si supponga assegnato un modello statistico i cui elementi sono indicizzati da due parametri reali, detti θ_1 e θ_2. A partire da un campione casuale semplice di numerosità elevata, è stata calcolata la funzione di log-verosimiglianza in alcuni punti, ottenendo i valori di $l(\theta_1, \theta_2)$ riportati nella tabella che segue:

$l(\theta_1, \theta_2)$

	θ_1		
θ_2	0	1	2
0	-58.1	-40.3	-41.4
1	-58.7	-41.2	-43.9
2	-59.3	-52.7	-43.8
3	-50.2	-54.3	-45.9
4	-49.1	-54.2	-45.6
5	-47.1	-51.3	-52.4
6	-45.1	-48.4	-54.5
7	-45.2	-46.5	-56.3
8	-45.8	-47.5	-54.2
9	-43.1	-44.5	-54.2
10	-43.3	-43.2	-53.2

Si assuma inoltre che sia possibile far riferimento alla teoria asintotica.

1 Si calcoli la stima di massima verosimiglianza di $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.

2 Si verifichi l'ipotesi nulla $H_0 : \theta_1 = 1$ e $\theta_2 = 1$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \theta_1 \neq 1$ o $\theta_2 \neq 1$ con livello di significatività 0.05, utilizzando la distribuzione approssimata di $W(\theta)$.

3 Si calcoli un'approssimazione del livello di significatività osservato del test precedente.

4 Si determini una regione di confidenza per θ con livello 0.95, basata sulla distribuzione approssimata di $W(\theta)$.

5 Si verifichi l'ipotesi nulla $H_0 : \theta_2 = 5$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \theta_2 \neq 5$ con livello di significatività 0.10, utilizzando la distribuzione approssimata di $W_P(\theta_2)$.

6 Si calcoli un'approssimazione del livello di significatività osservato del test precedente.

7 Si determini un intervallo di confidenza per θ_2 con livello 0.90, basato sulla distribuzione approssimata di $W_P(\theta_2)$.