INFERENZA STATISTICA II
Prova d'esame del 21 febbraio 2002

1. Siano $y_1, \ldots, y_{25}$ le durate, in ore, di un campione di 25 lampadine, estratto casualmente da un lotto di grandi dimensioni. Il tempo totale di funzionamento è risultato $\sum_{i=1}^{25} y_i = 91.03$. Si assuma che $y_1, \ldots, y_{25}$ sia un campione casuale semplice da una variabile casuale avente distribuzione esponenziale con media $1/\lambda$, $\lambda > 0$.

   (a) Si ottengano la funzione di log-verosimiglianza per λ, la funzione di punteggio (*score*) e l'informazione osservata.

   (b) Si ottenga lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\lambda}$ per λ e se ne calcoli il valore per i dati osservati.

   (c) Si stimi la probabilità che una lampadina duri più di 10 ore.

   (d) Si ottenga un'approssimazione per la distribuzione di $\hat{\lambda}$.

   (e) Si sfrutti l'approssimazione ottenuta in (d) per determinare un intervallo di confidenza per λ con livello approssimato 0.95.

   (f) Si verifichi $H_0 : \lambda = 1/4$ contro $H_1 : \lambda \neq 1/4$ al livello di significatività 0.1, utilizzando la statistica $W(\lambda)$.

   (g) Si calcoli un'approssimazione del livello di significatività osservato del test ottenuto al punto (f).

2. Per il campione casuale semplice $y = (y_1, \ldots, y_{1000})$, si è ipotizzato un modello statistico indicizzato da un parametro bidimensionale $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$. I valori della funzione di log-verosimiglianza in alcuni punti sono riportati nella tabella seguente.

$l(\theta_1, \theta_2)$

	θ_1									
θ_2	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
-5	8.1	10.3	11.4	14.1	14.5	14.2	13.7	12.4	12.1	11.8
-4	8.7	11.2	13.9	15.2	16.5	16.3	15.8	15.7	15.6	12.7
-3	9.3	12.7	13.8	16.3	17.1	17.2	15.1	14.6	13.7	13.6
-2	10.2	14.3	15.9	15.8	17.5	15.2	13.1	12.2	10.1	9.8
-1	9.1	14.2	15.6	13.1	14.5	14.2	12.8	12.4	12.3	11.8
0	7.1	11.3	12.4	13.3	13.2	13.2	10.7	9.8	8.1	7.1
1	5.1	8.4	11.5	12.1	12.0	11.9	10.1	9.4	8.0	7.8

   (a) Si calcoli la stima di massima verosimiglianza di θ.

   (b) Si verifichi l'ipotesi nulla $H_0 : \theta_2 = -4$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \theta_2 \neq -4$ al livello di significatività 0.05, assumendo che si possa far riferimento alla usuale approssimazione per la distribuzione nulla di $W_P(\theta_2)$.

   (c) Si calcoli un'approssimazione del livello di significatività osservato del test ottenuto al punto (b).

   (d) Si ottenga una regione di confidenza per θ_2 con livello 0.95, basata sulla distribuzione approssimata di $W_P(\theta_2)$, ossia $\hat{\Theta}_2(y) = \{\theta_2 : W_P(\theta_2) < \chi^2_{1;0.95}\}$.