INFERENZA STATISTICA II

Prova d'esame del 24 settembre 2002

Soluzione

Nota bene: Si danno qui solo i risultati per i singoli quesiti, sono omessi i passaggi, che naturalmente lo studente deve includere nel compito scritto d'esame.

ESERCIZIO 1

(a)
- $\Theta = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$
- $L(\theta) = L(\mu, \lambda) = (\mu^2 \lambda)^{-n} \exp\{-\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n (y_i + z_i/\lambda)\}$
- $l(\theta) = l(\mu, \lambda) = -2n \log \mu - n \log \lambda - \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n (y_i + z_i/\lambda)$

(b)
- $$\frac{\partial l(\mu, \lambda)}{\partial \mu} = -\frac{2n}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} \sum_{i=1}^n (y_i + z_i/\lambda)$$
  $$\frac{\partial l(\mu, \lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\mu \lambda^2} \sum_{i=1}^n z_i$$
- $$j(\mu, \lambda) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l(\mu, \lambda)}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 l(\mu, \lambda)}{\partial \mu \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 l(\mu, \lambda)}{\partial \mu \partial \lambda} & \frac{\partial^2 l(\mu, \lambda)}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix}$$
  con
  $$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l(\mu, \lambda)}{\partial \mu^2} &= +\frac{2n}{\mu^2} - \frac{2}{\mu^3} \sum_{i=1}^n (y_i + z_i/\lambda)\,, \\ \frac{\partial^2 l(\mu, \lambda)}{\partial \mu \partial \lambda} &= -\frac{1}{\mu^2 \lambda^2} \sum_{i=1}^n z_i\,, \\ \frac{\partial^2 l(\mu, \lambda)}{\partial \lambda^2} &= \frac{n}{\lambda^2} - \frac{2}{\mu \lambda^3} \sum_{i=1}^n z_i\,. \end{aligned}$$
- $$i(\mu, \lambda) = \begin{pmatrix} i_{\mu\mu} & i_{\mu\lambda} \\ i_{\mu\lambda} & i_{\lambda\lambda} \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} \frac{2}{\mu^2} & \frac{1}{\mu\lambda} \\ \frac{1}{\mu\lambda} & \frac{1}{\lambda^2} \end{pmatrix}.$$

(c) $\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \hat{\lambda})$, con

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 64.17$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{\sum_{i=1}^n y_i} = 0.28$$

(d) $W_P(\lambda)\,|_{\lambda=1} = 2(l(\hat{\mu}, \hat{\lambda}) - l(\hat{\mu}_0, 1))$, con

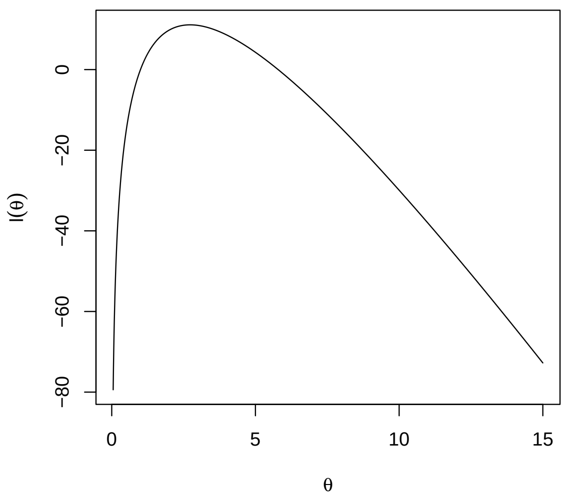
$\hat{\mu}_0 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (y_i + z_i)}{2n} = 41.17\,.$

Risulta $W_P(\lambda)\,|_{\lambda=1} = 4.49$.

(e) L'approssimazione $W_P(\lambda) \dot\sim \chi^2_1$ sotto H_0 fornisce $\alpha^{oss} \doteq 0.034$. I dati contraddicono l'ipotesi di parità dei due trattamenti: l'ipotesi nulla $H_0 : \lambda = 1$ verrebbe rifiutata dal test con livello 0.05 basato su $W_P(\lambda)$. H_0 non sarebbe però rifiutata ponendo $\alpha = 0.01$, dunque non possiamo affermare che vi sia una fortissima evidenza contro H_0.

ESERCIZIO 2

(a) $l(\theta) = 30 \log \theta - 11\theta + 11$



(b) $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n (1 - \log y_i)} = 2.73$

(c) $\hat{\theta} \dot\sim N(\theta, \hat{\jmath}^{-1})$, con $\hat{\jmath}^{-1} = 0.5^2$.

(d) L'intervallo è $(1.75, 3.7)$.

(e) $W(\theta) = 2\,\{0.099 - 30 \log \theta + 11\theta\}$

(f) $\hat{\Theta}(y) = \{\theta > 0 : W(\theta) \leq 3.84\}$. Dal grafico di $l(\theta)$ si deduce che $\hat{\Theta}(y)$ è un intervallo con estremi $\hat{\theta}_L$ e $\hat{\theta}_U$. Tali valori vanno determinati numericamente (si ha $\hat{\theta}_L \doteq 1.8$ e $\hat{\theta}_U \doteq 3.82$).

Risulta $\psi = \psi(\theta) = \int_0^{0.5} p(y;\theta)dy = 1 - 0.5^\theta$, per cui ψ è funzione monotona crescente di θ. L'intervallo di confidenza per ψ con livello approssimato 0.95 basato su $W(\theta)$ è allora $(\hat{\psi}_L, \hat{\psi}_U)$, con $\hat{\psi}_L = \psi(\hat{\theta}_L) = 1 - 0.5^{\hat{\theta}_L} \doteq 0.71$ e $\hat{\psi}_U = \psi(\hat{\theta}_U) = 1 - 0.5^{\hat{\theta}_U} \doteq 0.93$.