INFERENZA STATISTICA II
Prova d'esame del 9 settembre 2002

1. Sia $y = (y_1, \dots, y_n)$ un campione casuale semplice da una variabile casuale con distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$ e sia $z = (z_1, \dots, z_m)$ un campione casuale semplice, indipendente dal precedente, da una variabile casuale con distribuzione $N(\mu + a, \sigma^2)$, con $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$ parametri ignoti e $a \in \mathbb{R}$ costante nota.

   (a) Si indichi lo spazio parametrico Θ e si scrivano la funzione di verosimiglianza e log-verosimiglianza per θ.

   (b) Si ottengano la funzione di punteggio, l'informazione osservata e l'informazione attesa.

   (c) Si ottenga la stima di massima verosimiglianza di θ con $n = 4$, $m = 5$, $a = 2$, $y = (1.22, 2.04, 0.78, 0.72)$, $z = (3.76, 2.86, 3.01, 3.03, 4.17)$.

   (d) Con i dati del punto (c), si calcoli il test $W_p(\mu)$ per $H_0 : \mu = 1$ contro $H_1 : \mu \neq 1$.

   (e) Si calcoli il livello disignificatività osservato del test ottenuto al punto precedente.

2. Siano $y_1, \dots, y_{100}$ i valori di reddito lordo annuo (in migliaia di euro) di 100 clienti abituali del grande magazzino Z. In particolare, è risultato $\sum_{i=1}^{100} \log y_i = 500$. Si assuma che $y_1, \dots, y_{100}$ sia un campione casuale semplice da una variabile casuale avente distribuzione continua con densità

$$p(y; \theta) = \frac{\theta\, 5^\theta}{y^{\theta+1}}, \qquad \theta > 0,\ y \geq 5.$$

   (a) Si scriva la funzione di log-verosimiglianza per θ e se ne tracci il grafico.

   (b) Si ottenga lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\theta}$ per θ e se ne calcoli il valore per i dati osservati.

   (c) Si ottenga un'approssimazione per la distribuzione di $\hat{\theta}$.

   (d) Si sfrutti l'approssimazione ottenuta in (c) per determinare un intervallo di confidenza per θ con livello approssimato 0.95.

   (e) Si ottenga l'espressione della statistica log-rapporto di verosimiglianza $W(\theta)$.

   (f) Si indichi come costruire un intervallo di confidenza con livello approssimato 0.95 per θ basato su $W(\theta)$. Si spieghi che relazione c'è tra questo tipo di intervallo e quello ottenuto al punto (d).