INFERENZA STATISTICA II

Homework 4

Soluzione

Nota Bene. Si danno qui solo i risultati per i singoli quesiti, sono omessi i passaggi ed i commenti, che naturalmente lo studente è invitato a presentare con cura. Tutti i risultati numerici sono stati arrotondati.

Esercizio 4.1.

1. La funzione di log-verosimiglianza per θ è

$$\ell(\theta) = n \log \theta + \theta \sum_{i=1}^{n} \log y_i \ .$$

   La funzione punteggio per θ è $\ell_*(\theta) = (n/\theta) + \sum_{i=1}^{n} \log y_i$, da cui si ricava che lo stimatore di massima verosimiglianza di θ è

$$\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log Y_i} \ .$$

   Per $n = 30$ e $\sum_{i=1}^{30} \log y_i = -7.07$, risulta $\hat{\theta} = 4.241$. La derivata seconda della log-verosimiglianza per θ è $\ell_{**}(\theta) = -n/\theta^2$ e, poiché $\ell_{**}(\hat{\theta}) < 0$, $\hat{\theta}$ è un punto di massimo.

2. L'informazione osservata per θ è

$$j(\theta) = -\ell_{**}(\theta) = \frac{n}{\theta^2} \ .$$

   Poiché $E_\theta(j(\theta)) = j(\theta)$, l'informazione osservata e attesa per θ coincidono, ossia $i(\theta) = j(\theta)$.

3. La distribuzione approssimata di $\hat{\theta}$ è una normale con media θ e varianza asintotica $j(\hat{\theta})^{-1} = \hat{\theta}^2/n = 0.599$.

4. Un intervallo di confidenza per θ basato sulla distribuzione approssimata di $\hat{\theta}$ con livello approssimato 0.95 è

$$\left(\hat{\theta} \pm z_{0.975}\sqrt{j(\hat{\theta})^{-1}}\right) = (4.241 \pm 1.96 \times 0.774) = (2.724, 5.758) \ .$$

5. Un intervallo di confidenza per θ basato sulla distribuzione approssimata di $W(\theta)$ con livello approssimato 0.95 è dato dai valori del parametro θ che soddisfano

$$W(\theta) = 2\left(n \log \frac{\hat{\theta}}{\theta} + (\hat{\theta} - \theta)\sum_{i=1}^{n} \log y_i\right) < \chi^2_{1;0.95} \ ,$$

con $\chi^2_{1;0.95} = 3.841$. La precedente espressione può essere riscritta come

$$\log \theta + \theta \frac{\sum_{i=1}^{n} \log y_i}{n} > \log \hat{\theta} + \hat{\theta} \frac{\sum_{i=1}^{n} \log y_i}{n} - \frac{3.841}{2n} \ ,$$

ossia come

$$\log \theta - 0.236\, \theta > 0.381 \ .$$

Dal grafico di $\log \theta - 0.236\, \theta$ si individua numericamente l'intervallo $(2.89, 5.93)$.

6. Per la verifica di $H_0 : \theta = \theta_0 = 4$ contro l'alternativa $H_1 : \theta \neq 4$, il valore osservato della funzione test $T = (\hat{\theta} - \theta_0)/\sqrt{j(\hat{\theta})^{-1}}$ è $t^{oss} = (4.241 - 4)/\sqrt{0.599} = 0.311$. Il livello di significatività osservato risulta pari a $\alpha^{oss} = 0.755$ e tale valore indica che i dati sono conformi con l'ipotesi nulla.

Esercizio 4.2.

1. La funzione di log-verosimiglianza per θ è

$$\ell(\theta) = n \log \theta - \theta \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \ .$$

La funzione punteggio per θ è $\ell_*(\theta) = (n/\theta) - \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$, da cui si ricava che lo stimatore di massima verosimiglianza di θ è

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i Y_i} \ .$$

Per $n = 15$ e $\sum_{i=1}^{15} a_i y_i = 11$, risulta $\hat{\theta} = 1.36$. La derivata seconda della log-verosimiglianza per θ è $\ell_{**}(\theta) = -n/\theta^2$ e, poiché $\ell_{**}(\hat{\theta}) < 0$, $\hat{\theta}$ è un punto di massimo.

2. L'informazione osservata per θ è

$$j(\theta) = -\ell_{**}(\theta) = \frac{n}{\theta^2} \ .$$

Poiché $E_\theta(j(\theta)) = j(\theta)$, l'informazione osservata e attesa per θ coincidono, ossia $i(\theta) = j(\theta)$.

3. La distribuzione approssimata di $\hat{\theta}$ è una normale con media θ e varianza asintotica $j(\hat{\theta})^{-1} = \hat{\theta}^2/n = 0.123$.

4. Un intervallo di confidenza per θ basato sulla distribuzione approssimata di $\hat{\theta}$ con livello approssimato 0.95 è

$$\left(\hat{\theta} \pm z_{0.975}\sqrt{j(\hat{\theta})^{-1}}\right) = (1.36 \pm 1.96 \times 0.351) = (0.672, 2.048) \ .$$

5. Un intervallo di confidenza per θ basato sulla distribuzione approssimata di $W(\theta)$ con livello approssimato 0.95 è formato dai valori del parametro θ che soddisfano

$$W(\theta) = 2\left(n \log \frac{\hat{\theta}}{\theta} - (\hat{\theta} - \theta)\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right) < \chi^2_{1;0.95} \ ,$$

con $\chi^2_{1;0.95} = 3.841$. La precedente espressione può essere riscritta come

$$\theta \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i y_i}{n} - \log \theta < \frac{3.841}{2n} - \log \hat{\theta} + \hat{\theta} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i y_i}{n} \ ,$$

ossia come

$$0.733\,\theta - \log \theta < 0.818 \ .$$

Dal grafico di $0.733\,\theta - \log\theta$ si individua numericamente l'intervallo $(0.78, 2.18)$.

6. Per la verifica di $H_0 : \theta = \theta_0 = 1$ contro l'alternativa $H_1 : \theta \neq 1$, il valore osservato della funzione test $T = (\hat{\theta} - \theta_0)/\sqrt{j(\hat{\theta})^{-1}}$ è $t^{oss} = (1.36 - 1)/\sqrt{0.123} = 1.026$. Il livello di significatività osservato risulta pari a $\alpha^{oss} = 0.305$ e tale valore indica che i dati sono conformi con l'ipotesi nulla.

Esercizio 4.3.

La funzione di log-verosimiglianza per μ è

$$\ell(\mu) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a\mu)^2 \ .$$

La funzione punteggio per μ è $\ell_*(\mu) = a\sum_{i=1}^{n}(y_i - a\mu)$. Lo stimatore di massima verosimiglianza per μ è

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{Y}}{a} \ .$$

La derivata seconda della log-verosimiglianza rispetto a μ è $\ell_{**}(\mu) = -a^2 n$ e, poiché $\ell_{**}(\hat{\mu}) < 0$, $\hat{\mu}$ è un punto di massimo. L'informazione osservata per μ è

$$j(\mu) = -\ell_{**}(\mu) = a^2 n \ .$$

La distribuzione approssimata di $\hat{\mu}$ è una normale con media μ e varianza asintotica $j(\hat{\mu})^{-1} = 1/(a^2 n)$. Un intervallo di confidenza per μ con livello approssimato 0.95 è

$$\left(\hat{\mu} \pm z_{0.975}\sqrt{j(\hat{\mu})^{-1}}\right) = \left(\hat{\mu} \pm z_{0.975}\frac{1}{a\sqrt{n}}\right) .$$

In realtà, il livello dell'intervallo di confidenza ottenuto è esatto in quanto è immediato mostrare che la distribuzione esatta di $\hat{\mu} = \bar{Y}/a$ è una normale con media $E_\mu(\hat{\mu}) = \mu$ e varianza $V_\mu(\hat{\mu}) = 1/(a^2 n)$.

Un intervallo di confidenza per μ basato sulla distribuzione approssimata di $W(\mu)$ con livello approssimato 0.95 è formato dai valori del parametro μ che soddisfano $W(\mu) < \chi^2_{1;0.95}$, con $\chi^2_{1;0.95} = 3.841$ e

$$W(\mu) = 2\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a\mu)^2\right) .$$

Ma la disuguaglianza $W(\mu) < \chi^2_{1;0.95}$ può essere riscritta come

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2 + 2n\bar{y}^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + na^2\mu^2 - 2a\mu\sum_{i=1}^{n} y_i &< \chi^2_{1;0.95} \\
n\bar{y}^2 - 2na\mu\bar{y} + na^2\mu^2 &< \chi^2_{1;0.95} \\
na^2\hat{\mu}^2 - 2na^2\mu\hat{\mu} + na^2\mu^2 &< \chi^2_{1;0.95} \\
na^2(\hat{\mu} - \mu)^2 &< \chi^2_{1;0.95} ,
\end{aligned}$$

ossia come

$$-\sqrt{\chi^2_{1;0.95}} < a\sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu) < \sqrt{\chi^2_{1;0.95}} .$$

Ma poiché $\sqrt{\chi^2_{1;0.95}} = z_{0.975}$, esplicitando rispetto a μ la precedente espressione, si ottiene proprio l'intervallo

$$\left(\hat{\mu} \pm z_{0.975}\frac{1}{a\sqrt{n}}\right) .$$

Concludendo, un intervallo di confidenza per μ basato sulla distribuzione approssimata di $W(\mu)$ coincide con quello basato sulla distribuzione dello stimatore di massima verosimiglianza, e il livello dell'intervallo di confidenza è esatto.