Inferenza Statistica II	
A.A. 2002-2003	**Esercitazione 3**

Esempio 3.1. Si considerino i seguenti dati (in migliaia di lire) relativi a $n = 10$ famiglie italiane (si veda l'Esempio 2.1)

Spesa per viaggi	(y)	800	1100	500	8200	5300
Reddito	(x)	15700	21200	13500	64500	42300
Spesa per viaggi	(y)	2800	4400	1600	4000	1700
Reddito	(x)	34600	54800	28500	33000	19900

Si assuma che $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sia un campione casuale tratto da variabili casuali indipendenti $Y_i \sim N(\beta\, x_i, \sigma_0^2)$, dove le x_i si suppongono fissate e σ_0^2 è considerato noto.

1 Dopo aver scritto la funzione di log-verosimiglianza per β, si ottenga lo stimatore di massima verosimiglianza e se ne calcoli il valore per i dati osservati.

2 Si determinino l'informazione osservata e attesa per β.

3 Si determini la distribuzione approssimata di $\hat{\beta}$ (è esatta?)

4 Si calcoli un intervallo di confidenza per β con livello 0.95, se $\sigma_0^2 = 1,000,000$.

Esempio 3.2. In una piccola stazione si è interessati a valutare l'aumento del traffico pomeridiano. A tale scopo, si compie uno studio sul numero di treni in partenza nelle ore pomeridiane contando il numero di partenze per un intervallo di tempo pari a 60 minuti e ripetendo l'osservazione per 4 volte. Si supponga che il campione casuale semplice di osservazioni $y = (7, 4, 11, 8)$ sia tratto da una variabile casuale di Poisson con media λ.

1 Si ottenga la stima di massima verosimiglianza del numero medio di partenze nelle ore pomeridiane.

2 Qual è la stima se lo spazio parametrico è $\{4, 7, 11\}$?

3 Si determinino l'informazione osservata e attesa per λ.

4 Si calcoli un'approssimazione per la distribuzione dello stimatore di massima verosimiglianza. Si determini anche la distribuzione esatta dello stimatore di massima verosimiglianza.

5 Utilizzando il risultato del punto 4, si verifichi l'ipotesi nulla $H_0 : \lambda = \lambda_0 = 8$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \lambda < \lambda_0 = 8$. Si calcoli il livello di significatività osservato e si dica se H_0 viene accettata o rifiutata con livello $\alpha = 0.05$ fissato.

Esempio 3.3. Si supponga che la durata di vita di una batteria Y segua una distribuzione esponenziale con media $1/\lambda$, $\lambda > 0$. Sia

$$y = (3, 6, 5, 2.3, 7, 4.6, 3.8, 5.5, 11, 6.8)$$

un campione casuale semplice di osservazioni espresse in mesi.

1 Si scriva la funzione di log-verosimiglianza per $\psi = F(1; \lambda)$, dove $F(y; \lambda)$ indica la funzione di ripartizione di Y.

2 Si calcoli la stima di massima verosimiglianza di ψ e si mostri che coincide con $F(1; \hat{\lambda})$, dove $\hat{\lambda}$ è la stima di massima verosimiglianza di λ.

3 Si trovi l'informazione osservata per ψ.

4 Si trovi l'informazione attesa per ψ.

5 Si determini un intervallo di confidenza per ψ con livello 0.90 basato sulla distribuzione approssimata dello stimatore di massima verosimiglianza.

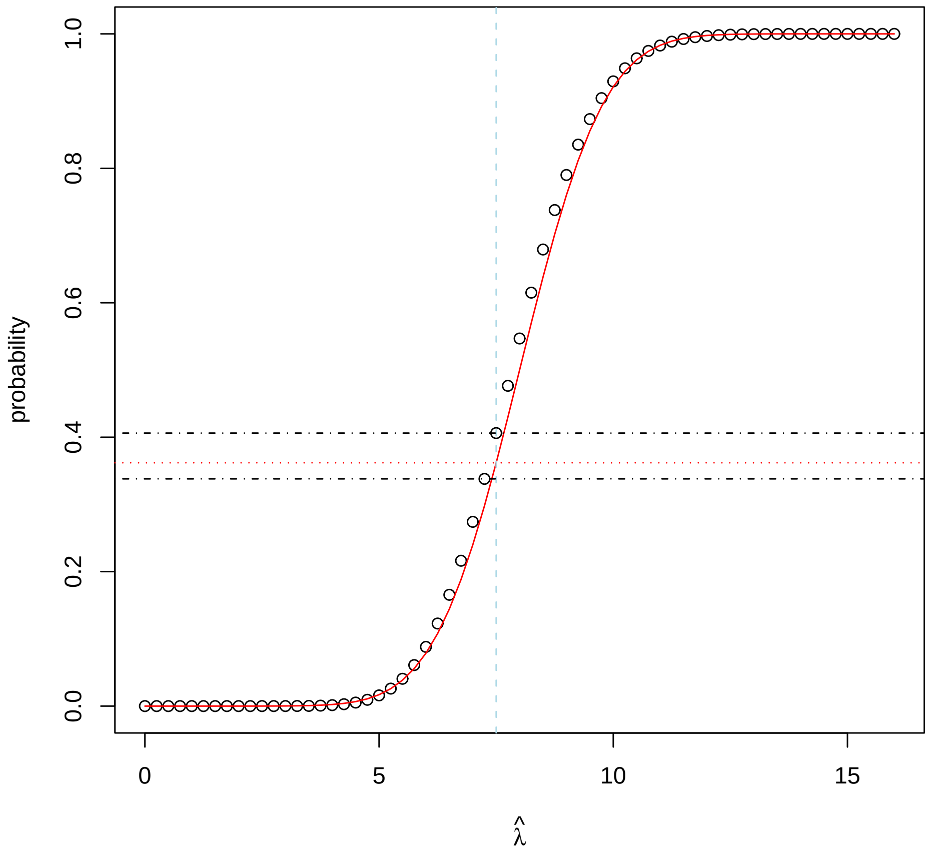

Figura 1: Esempio 3.2. Funzione di ripartizione esatta ed approssimata dello stimatore di massima verosimiglianza di λ: linea continua = approssimata; punti = esatta.