INFERENZA STATISTICA II

Homework 6

Soluzione

Nota Bene. Si danno qui solo i risultati per i singoli quesiti, sono omessi i passaggi ed i commenti, che naturalmente lo studente è invitato a presentare con cura. Tutti i risultati numerici sono stati arrotondati.

Esercizio 6.1.

Posto $m = n + k$, la funzione di log-verosimiglianza per (μ, σ^2) è

$$\ell(\mu, \sigma^2) = -\frac{m}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \sum_{j=1}^{k} (x_j - \mu)^2 \right] .$$

Gli stimatori di massima verosimiglianza di μ e σ^2 sono dati da $\hat{\mu} = (1/k) \sum_{j=1}^{k} X_j = \bar{X}$ e $\hat{\sigma}^2 = (1/m) \left[\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 + \sum_{j=1}^{k} (X_j - \bar{X})^2 \right]$. Per i campioni osservati, risulta $\hat{\mu} = -0.9$ e $\hat{\sigma}^2 = 8.454$. In questo caso, lo stimatore di massima verosimiglianza di μ con σ^2 fissato coincide con $\hat{\mu}$, ossia $\hat{\mu}_{\sigma^2} = \hat{\mu}$. Risulta quindi

$$\ell(\hat{\mu}_{\sigma^2}, \sigma^2) = \ell(\hat{\mu}, \sigma^2) = -\frac{m}{2} \log \sigma^2 - \frac{m}{2} \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} .$$

1. Il valore osservato della statistica

$$W_P(\sigma^2) = 2 \left[\ell(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) - \ell(\hat{\mu}, \sigma^2) \right] = m \left[\log \frac{\sigma^2}{\hat{\sigma}^2} - 1 + \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \right]$$

   è $w_P^{oss} = W_P(4) = 14 (\log(4/8.454) - 1 + (8.454/4)) = 5.112$. Poiché sotto H_0 la distribuzione approssimata di $W_P(\sigma_0^2)$ è un χ_1^2, risulta $w_P^{oss} = 5.112 > \chi^2_{1;0.90} = 2.705$, ossia che i dati non sono conformi con l'ipotesi nulla.

2. Il livello di significatività osservato risulta pari a $\alpha^{oss} = Pr_{\sigma_0^2}(W_P(\sigma_0^2) \geq w_P^{oss}) = 0.024$ e tale valore indica che i dati non sono conformi con l'ipotesi nulla.

3. Poiché la distribuzione approssimata di $W_P(\sigma^2)$ è un χ_1^2, un intervallo di confidenza per σ^2 con livello approssimato 0.99 è dato dai valori di σ^2 tali che

$$m \left(\log \frac{\sigma^2}{\hat{\sigma}^2} - 1 + \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \right) \leq \chi^2_{1;0.99}$$

che, per $\chi^2_{1;0.99} = 6.635$, può essere riscritto come

$$\log \sigma^2 + \frac{8.454}{\sigma^2} \leq 3.608 \ .$$

Numericamente, si ottiene l'intervallo $(3.63, 26.93)$.

4. Il valore osservato della statistica

$$r_P(\sigma^2) = \mathrm{sgn}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)\sqrt{W_P(\sigma^2)}$$

è $r_P^{oss} = r_P(4) = \mathrm{sgn}(8.454 - 4)\sqrt{5.112} = 2.261$. Poiché sotto H_0 la distribuzione approssimata di $r_P(\sigma_0^2)$ è una $N(0,1)$, si rifiuta l'ipotesi nulla se $r_P^{oss} < -z_{1-\alpha}$. Poiché $r_P^{oss} = 2.261 > -1.282$, l'ipotesi nulla non viene rifiutata.

5. Il livello di significatività osservato del test precedente risulta pari a $\alpha^{oss} = Pr_{\sigma_0^2}(r_P(\sigma_0^2) < r_p^{oss}) = \Phi(2.261) = 0.988$ e tale valore indica che i dati sono conformi con l'ipotesi nulla.

6. L'informazione osservata calcolata in $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ è una matrice diagonale di dimensione (2×2), con elementi sulla diagonale principale dati da $k/\hat{\sigma}^2$ e $m/(2\hat{\sigma}^4)$. Secondo l'approssimazione della distribuzione dello stimatore di massima verosimiglianza, risulta che $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}^2$ sono indipendenti con distribuzioni marginali approssimate $N(\mu, \hat{\sigma}^2/k)$ e $N(\sigma^2, 2\hat{\sigma}^4/m)$, rispettivamente. Pertanto, un intervallo di confidenza per σ^2 basato sulla distribuzione marginale approssimata di $\hat{\sigma}^2$ con livello 0.99 è

$$\left(\hat{\sigma}^2 \pm z_{0.995}\sqrt{\frac{2\hat{\sigma}^4}{m}}\right) = (4.454 \pm 2.58 \times 3.195) = (0.223, 16.68) \ .$$

Esercizio 6.2.

La funzione di log-verosimiglianza per (α, λ) è

$$\ell(\alpha, \lambda) = n\alpha \log \lambda + \alpha \sum_{i=1}^{n} \log y_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} y_i - n \log \Gamma(\alpha) \ .$$

Lo stimatore di massima verosimiglianza di λ con α fissato è $\hat{\lambda}_\alpha = n\alpha / \sum_{i=1}^n Y_i$. Risulta quindi

$$\ell(\alpha, \hat{\lambda}_\alpha) = n\alpha \log\left(\frac{n\alpha}{\sum_{i=1}^n y_i}\right) + \alpha \sum_{i=1}^{n} \log y_i - n\alpha - n \log \Gamma(\alpha) \ .$$

1. Il valore osservato della statistica

$$\begin{aligned} W_P(\alpha) &= 2\left[\ell(\hat\alpha,\hat\lambda)-\ell(\alpha,\hat\lambda_\alpha)\right] \\ &= 2\left[n\hat\alpha\log\left(\frac{n\hat\alpha}{\sum_{i=1}^n y_i}\right)+\hat\alpha\sum_{i=1}^n\log y_i-n\hat\alpha-n\log\Gamma(\hat\alpha)\right. \\ &- \left. n\alpha\log\left(\frac{n\alpha}{\sum_{i=1}^n y_i}\right)-\alpha\sum_{i=1}^n\log y_i+n\alpha+n\log\Gamma(\alpha)\right] \end{aligned}$$

è $w_P^{oss}=W_P(1)=2\,(11.593)=23.186$, essendo $\Gamma(2)=\Gamma(1)=1$. Poiché sotto H_0 la distribuzione approssimata di $W_P(\alpha_0)$ è un χ^2_1, risulta $w_P^{oss}=23.186>\chi^2_{1;0.95}=3.841$, ossia che i dati non sono conformi con l'ipotesi nulla.

2. Il livello di significatività osservato risulta pari a $\alpha^{oss}=Pr_{\alpha_0}(W_P(\alpha_0)\geq w_P^{oss})=0.000001$ e tale valore indica che i dati non sono conformi con l'ipotesi nulla.

3. Poiché la distribuzione approssimata di $W_P(\alpha)$ è un χ^2_1, un intervallo di confidenza per α con livello approssimato 0.90 è dato dai valori di α tali che
$$W_P(\alpha)\leq\chi^2_{1;0.90}=2.71\ ,$$
che può essere riscritto come
$$0.611\ \alpha+\log\Gamma(\alpha)-\alpha\log(0.517\ \alpha)\leq 1.167\ .$$
Numericamente, si ottiene l'intervallo $(1.598, 2.466)$.

4. Il valore osservato della statistica
$$r_P(\alpha)=\text{sgn}(\hat\alpha-\alpha)\sqrt{W_P(\alpha)}$$
è $r_P^{oss}=r_P(1)=\text{sgn}(2-1)\sqrt{23.186}=4.815$. Poiché sotto H_0 la distribuzione approssimata di $r_P(\alpha)$ è una $N(0,1)$, si rifiuta l'ipotesi nulla se $r_P^{oss}>z_{1-\alpha}$. Poiché $r_P^{oss}=4.815>1.64$, l'ipotesi nulla viene rifiutata.

5. Il livello di significatività osservato del test precedente risulta pari a $\alpha^{oss}=Pr_{\alpha_0}(r_P(\alpha_0)>r_p^{oss})=1-\Phi(4.815)=0.000001$ e tale valore indica che i dati non sono conformi con l'ipotesi nulla.

Esercizio 6.3.

1. Per definizione, la stima di massima verosimiglianza di θ è quel valore $\hat\theta$ nello spazio parametrico tale che $\ell(\hat\theta)\geq\ell(\theta)$, $\forall\theta\in\Theta$. Con i valori di $\ell(\theta)$ forniti nella tabella si trova che la stima di massima verosimiglianza è $\hat\theta=(\hat\theta_1,\hat\theta_2)=(1,0)$, in quanto il valore massimo della funzione di log-verosimiglianza è -40.3.

2. Il valore osservato della statistica
$$W(\theta) = 2\left(\ell(\hat{\theta}) - \ell(\theta)\right)$$
è $w^{oss} = W((1,1)) = 2\,(-40.3 + 41.2) = 1.8$. Poiché sotto H_0 la distribuzione approssimata di $W(\theta_0)$ è un χ^2_2, risulta che $w^{oss} = 1.8 < \chi^2_{2;0.95} = 5.99$, ossia che i dati sono conformi con l'ipotesi nulla.

3. Il livello di significatività osservato risulta pari a $\alpha^{oss} = Pr_{\theta_0}(W(\theta_0) \geq w^{oss}) = 0.407$ e tale valore indica che i dati sono conformi con l'ipotesi nulla.

4. Poiché la distribuzione approssimata di $W(\theta)$ è un χ^2_2, una regione di confidenza per θ con livello approssimato 0.95 è data dai valori di θ tali che
$$W(\theta) \leq \chi^2_{2;0.95} = 5.99\ ,$$
che può essere riscritta come
$$\ell(\theta) > \ell(\hat{\theta}) - \frac{\chi^2_{2;0.95}}{2} = -43.295\ .$$
Dalla tabella si trova che una regione di confidenza con livello approssimato 0.95 è
$$\{\theta : \theta = (0,9), (1,0), (1,1), (1,10), (2,0)\}\ .$$

5. Il valore osservato della statistica
$$W_P(\theta_2) = 2\left(\ell(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) - \ell(\hat{\theta}_{1,\theta_2}, \theta_2)\right)$$
è $w_P^{oss} = W_P(5) = 2\,(\ell(1,0) - \ell(0,5)) = 2(-40.3 + 47.1) = 13.6$. Poiché sotto H_0 la distribuzione approssimata di $W_P(\theta_{2,0})$ è un χ^2_1, risulta che $w_P^{oss} = 13.6 > \chi^2_{1;0.90} = 2.71$, ossia che i dati non sono conformi con l'ipotesi nulla.

6. Il livello di significatività osservato risulta pari a $\alpha^{oss} = Pr_{\theta_{2,0}}(W_P(\theta_{2,0}) \geq w_P^{oss}) = 0.0002$ e tale valore indica che i dati non sono conformi con l'ipotesi nulla.

7. Poiché la distribuzione approssimata di $W_P(\theta_2)$ è un χ^2_1, una regione di confidenza per θ_2 con livello approssimato 0.90 è data dai valori di θ_2 tali che
$$W_P(\theta_2) \leq \chi^2_{1;0.90} = 2.705$$
che può essere riscritta come
$$\ell(\hat{\theta}_{1,\theta_2}, \theta_2) > \ell(\hat{\theta}) - \frac{\chi^2_{2;0.90}}{2} = -41.652\ .$$
Dalla tabella si trova che una regione di confidenza per θ_2 con livello approssimato 0.90 è
$$\{\theta_2 : \theta_2 = 0, 1\}\ .$$