Inferenza Statistica II
A.A. 2002-2003 **Homework 4**

Esercizio 4.1. Siano $y_1, \dots, y_{30}$ realizzazioni indipendenti di variabili casuali beta con funzione di densità $p(y;\theta) = \theta y^{\theta-1}$, con $0 \leq y \leq 1$ e $\theta > 0$.

1 Si scriva la funzione di log-verosimiglianza e si calcoli la stima di massima verosimiglianza di θ, sapendo che $\sum_{i=1}^{n} \log(y_i) = -7.07$.

2 Si calcolino l'informazione osservata e attesa per θ.

3 Si scriva la distribuzione approssimata dello stimatore di massima verosimiglianza.

4 Si determini un intervallo di confidenza per θ con livello 0.95, basato sulla distribuzione approssimata dello stimatore di massima verosimiglianza.

5 Si determini un intervallo di confidenza per θ con livello 0.95, basato sulla distribuzione approssimata di $W(\theta)$.

6 Si verifichi l'ipotesi nulla $H_0 : \theta = \theta_0 = 4$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \theta \neq \theta_0$, utilizzando la distribuzione approssimata dello stimatore di massima verosimiglianza.

Esercizio 4.2. Siano $y_1, \dots, y_{15}$ realizzazioni indipendenti di variabili casuali gamma con funzione di densità $p_{Y_i}(y_i;\theta) = a_i\theta \exp(-a_i\theta y_i)$, con a_i costanti positive note.

1 Si scriva la funzione di log-verosimiglianza e si calcoli la stima di massima verosimiglianza di θ, sapendo che $\sum_{i=1}^{15} a_i y_i = 11$.

2 Si calcolino l'informazione osservata e attesa per θ.

3 Si ottenga la distribuzione approssimata dello stimatore di massima verosimiglianza.

4 Si determini un intervallo di confidenza per θ con livello 0.95, basato sulla distribuzione approssimata dello stimatore di massima verosimiglianza.

5 Si determini un intervallo di confidenza per θ con livello 0.95, basato sulla distribuzione approssimata di $W(\theta)$.

6 Si verifichi l'ipotesi nulla $H_0 : \theta = \theta_0 = 1$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \theta \neq 1$, utilizzando la distribuzione approssimata dello stimatore di massima verosimiglianza.

Esercizio 4.3. Siano $y_1, \ldots, y_n$ realizzazioni indipendenti di una variabile casuale con distribuzione normale con media $a\mu$, con a costante positiva nota, e varianza $\sigma^2 = 1$. Si mostri che un intervallo di confidenza per μ con livello 0.95, basato sulla distribuzione approssimata dello stimatore di massima verosimiglianza, coincide con un intervallo di confidenza per μ con livello 0.95, basato sulla distribuzione approssimata di $W(\mu)$. Si dica se in questo caso il livello dell'intervallo di confidenza è esatto.