INFERENZA STATISTICA II

Homework 5

Soluzione

Nota Bene. Si danno qui solo i risultati per i singoli quesiti, sono omessi i passaggi ed i commenti, che naturalmente lo studente è invitato a presentare con cura. Tutti i risultati numerici sono stati arrotondati.

Esercizio 5.1.

La funzione di log-verosimiglianza per λ è $\ell(\lambda) = \log \lambda \sum_{i=1}^n y_i - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2$. Lo stimatore di massima verosimiglianza di λ è $\hat\lambda = \sum_{i=1}^n Y_i / \sum_{i=1}^n x_i^2$. Per $\sum_{i=1}^n y_i = 10$ e $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 100$, risulta $\hat\lambda = 0.1$.

1. Il valore osservato della statistica

$$W(\lambda) = 2\left(\log \hat\lambda \sum_{i=1}^n y_i - \hat\lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 - \log \lambda \sum_{i=1}^n y_i + \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

è $w^{oss} = W(1) = 2\,(10 \times \log(0.1) - 0.1 \times 100 + 100) = 133.94$. Poiché sotto H_0 la distribuzione approssimata di $W(\lambda_0)$ è un χ_1^2, si trova che il livello di significatività osservato risulta pari a $\alpha^{oss} = Pr_{\lambda_0}(W(\lambda) \geq w^{oss}) = 0$ e tale valore indica che i dati non sono conformi con l'ipotesi nulla.

2. Il valore osservato della statistica

$$r(\lambda) = \mathrm{sgn}(\hat\lambda - \lambda)\sqrt{W(\lambda)}$$

è $r^{oss} = r(1) = \mathrm{sgn}(0.1 - 1)\sqrt{133.94} = -11.573$. Poiché sotto H_0 la distribuzione approssimata di $r(\lambda_0)$ è una $N(0,1)$, si rifiuta l'ipotesi nulla se $r^{oss} > z_{1-\alpha}$. Poiché $r^{oss} = -11.573 < 1.64$, l'ipotesi nulla non viene rifiutata. In questo caso, il livello di significatività osservato risulta pari a $\alpha^{oss} = Pr_{\lambda_0}(r(\lambda) > r^{oss}) = 1 - \Phi(-11.573) = 1$ e tale valore indica che i dati sono conformi con l'ipotesi nulla.

Esercizio 5.2.

La funzione di log-verosimiglianza per θ è $\ell(\theta) = n \log \theta + \theta \sum_{i=1}^n \log y_i$. Lo stimatore di massima verosimiglianza di θ è $\hat\theta = -n/(\sum_{i=1}^n \log Y_i)$, che per $n = 30$ e $\sum_{i=1}^{30} \log y_i = -7.07$, risulta pari a $\hat\theta = 4.241$.

1. Il valore osservato della statistica

$$W(\theta) = 2\left(n\log\hat{\theta} + \hat{\theta}\sum_{i=1}^{n}\log y_i - n\log\theta - \theta\sum_{i=1}^{n}\log y_i\right)$$

   è $w^{oss} = W(4) = 2\,(30 \times \log(4.241) - 4.241 \times 7.07 - 30 \times \log(4) + 4 \times 7.07) = 0.104$. Poiché sotto H_0 la distribuzione approssimata di $W(\theta_0)$ è un χ^2_1, si trova che il livello di significatività osservato risulta pari a $\alpha^{oss} = Pr_{\theta_0}(W(\theta) \geq w^{oss}) = 0.748$ e tale valore indica che i dati sono conformi con l'ipotesi nulla.

2. Il valore osservato della statistica

$$r(\theta) = \operatorname{sgn}(\hat{\theta} - \theta)\sqrt{W(\theta)}$$

   è $r^{oss} = r(4) = \operatorname{sgn}(4.241 - 4)\sqrt{0.103} = 0.321$. Poiché sotto H_0 la distribuzione approssimata di $r(\theta_0)$ è una $N(0,1)$, il livello di significatività osservato risulta pari a

$$\alpha^{oss} = 2\min(\Phi(r^{oss}), 1 - \Phi(r^{oss})) = 2\min(0.625, 0.374) = 0.748$$

   e tale valore indica che i dati sono conformi con l'ipotesi nulla. Si osservi che il valore di α^{oss} è lo stesso che si era ottenuto al punto precedente. Commentare.

Esercizio 5.3.

La funzione di log-verosimiglianza per θ è $\ell(\theta) = n\log\theta - \theta\sum_{i=1}^{n} a_i y_i$. Lo stimatore di massima verosimiglianza di θ è $\hat{\theta} = n/\sum_{i=1}^{n} a_i Y_i$. Per $\sum_{i=1}^{15} a_i y_i = 11$ e $n = 15$, risulta $\hat{\theta} = 1.364$.

1. Il valore osservato della statistica

$$W(\theta) = 2\left(n\log\hat{\theta} - n - n\log\theta + n\frac{\theta}{\hat{\theta}}\right)$$

   è $w^{oss} = W(1) = 2\,(15 \times \log(1.364) - 15 + 11) = 1.313$. Poiché sotto H_0 la distribuzione approssimata di $W(\theta_0)$ è un χ^2_1, si trova che il livello di significatività osservato risulta pari a $\alpha^{oss} = Pr_{\theta_0}(W(\theta) \geq w^{oss}) = 0.251$ e tale valore indica che i dati sono conformi con l'ipotesi nulla.

2. Il valore osservato della statistica

$$r(\theta) = \operatorname{sgn}(\hat{\theta} - \theta)\sqrt{W(\theta)}$$

   è $r^{oss} = r(1) = \operatorname{sgn}(1.364 - 1)\sqrt{1.313} = 1.146$. Poiché sotto H_0 la distribuzione approssimata di $r(\lambda_0)$ è una $N(0,1)$, il livello di significatività osservato risulta pari a $\alpha^{oss} = Pr_{\theta_0}(r(\theta_0) < r^{oss}) = \Phi(1.146) = 0.874$ e tale valore indica che i dati sono conformi con l'ipotesi nulla.

Esercizio 5.4.

La funzione di log-verosimiglianza per θ è

$$\ell(\theta) = -\frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (y_i - \beta x_i)^2 \ .$$

Lo stimatore di massima verosimiglianza di $\theta = (\beta, \sigma^2)$ è $\hat{\theta} = (\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$, con $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^n Y_i x_i / \sum_{i=1}^n x_i^2$ e $\hat{\sigma}^2 = (1/n)\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}x_i)^2$. Per i dati osservati, risulta $\hat{\beta} = 0.1009$ e $\hat{\sigma}^2 = 1028983$.

1. La statistica $W(\theta)$ ha la seguente forma

$$W(\theta) = \left(-n\log\hat{\sigma}^2 - n + n\log\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (y_i - \beta x_i)^2\right) \ .$$

Poiché la distribuzione approssimata di $W(\theta)$ è un χ^2_2, una regione di confidenza per θ con livello approssimato 0.95 è data dai valori di θ tali che

$$-n\log\hat{\sigma}^2 - n + n\log\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (y_i - \beta x_i)^2 \leq \chi^2_{2;0.95}$$

che, per $\chi^2_{2;0.95} = 5.99$, può essere riscritta come

$$n\log\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (y_i - \beta x_i)^2 \leq 154.4308 \ .$$

2. Il valore osservato della statistica

$$W(\theta) = \left(-n\log\hat{\sigma}^2 - n + n\log\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (y_i - \beta x_i)^2\right)$$

è $w^{oss} = W((0.10, 1000000)) = 0.0161$. Poiché sotto H_0 la distribuzione approssimata di $W(\theta_0)$ è un χ^2_2, il livello di significatività osservato risulta pari a $\alpha^{oss} = Pr_{\theta_0}(W(\theta) > w^{oss}) = 0.9920 > \alpha = 0.05$ e tale valore indica che i dati sono conformi con l'ipotesi nulla.