Inferenza Statistica II	
A.A. 2002-2003	**Homework 2**

Esercizio 2.1. Sia $y = (y_1, \dots, y_n)$ un campione casuale semplice da una variabile casuale con distribuzione $N(a\mu, \sigma_0^2)$, dove a e σ_0^2 sono costanti note.

1 Si scrivano la funzione di verosimiglianza e di log-verosimiglianza per μ.

2 Si ottenga lo stimatore di massima verosimiglianza di μ e se ne calcoli il valore per $a = 2$ e

$$y = (13.2, 8.2, 10.9, 14.3, 10.7, 6.6, 9.5, 10.8, 8.8, 13.3)\,.$$

3 Si calcoli la derivata seconda della log-verosimiglianza per μ e si ottenga la distribuzione esatta di $\hat{\mu}$.

Esercizio 2.2. Siano $(y_1, \dots, y_n)$ determinazioni indipendenti di una variabile casuale con distribuzione $N(0, \sigma^2)$ e $(x_1, \dots, x_k)$ determinazioni indipendenti, tra di loro e dalle precedenti, di una variabile casuale con distribuzione $N(0, a\sigma^2)$, dove a è una costante nota e positiva.

1 Si scrivano la funzione di verosimiglianza e di log-verosimiglianza per σ^2.

2 Si ottenga lo stimatore di massima verosimiglianza di σ^2 e se ne calcoli il suo valore se

$$\begin{aligned} y &= (2.6, -2.4, 0.3, 3.7, 0.1, -4.0, -1.1, 0.2, -1.8, 2.7)\,, \\ x &= (-3.9, 5.0, -5.2, 0.5) \end{aligned}$$

e $a = 2$.

3 Si calcoli la derivata seconda della log-verosimiglianza per σ^2.

Esercizio 2.3. Si supponga che la durata di vita di una batteria Y segua una distribuzione esponenziale con media $1/\lambda$, $\lambda > 0$. Sia

$$y = (3, 6, 5, 2.3, 7, 4.6, 3.8, 5.5, 11, 6.8)$$

un campione casuale semplice di osservazioni espresse in mesi.

1 Si proponga una stima per $F(1; \lambda)$, dove $F(y; \lambda)$ indica la funzione di ripartizione di Y.

2 Si trovi un intervallo di confidenza approssimato per $F(1; \lambda)$ con livello 0.90.

Esercizio 2.4. Con una moneta, non necessariamente regolare, risulta

$$\Pr(\text{Testa}) = \pi = 0.5 - \theta \qquad \text{e} \qquad \Pr(\text{Croce}) = 1 - \pi = 0.5 + \theta$$

con $-0.5 < \theta < 0.5$.

1 In n lanci indipendenti si sono ottenute y teste. Si ottenga lo stimatore di massima verosimiglianza di θ e se ne determini la varianza.

2 Si calcoli lo stimatore di massima verosimiglianza di θ con $n = 100$ e $y = 40$.

3 Con $n = 100$ e $y = 40$, si costruisca un intervallo di confidenza per θ con livello approssimato 0.99.

4 Con $n = 100$ e $y = 40$, si verifichi $H_0 : \theta = 0$ contro $H_1 : \theta \neq 0$ con livello approssimato $\alpha = 0.01$.

Riferimenti Utili

- Alcuni esercizi svolti sulla stima puntuale si possono trovare in Grigoletto M., Ventura L. (1998), *Statistica per le Scienze Economiche. Esercizi con Richiami di Teoria.*, Giappichelli Ed. Torino. In particolare si veda il Capitolo 4.