

Esempio 2.1. Si considerino i seguenti dati (in migliaia di lire) relativi a $n = 10$ famiglie italiane

Spesa per viaggi	(y)	800	1100	500	8200	5300
Reddito	(x)	15700	21200	13500	64500	42300
Spesa per viaggi	(y)	2800	4400	1600	4000	1700
Reddito	(x)	34600	54800	28500	33000	19900

Si assuma che $y = (y_1, \dots, y_n)$ sia un campione casuale tratto da variabili casuali indipendenti $Y_i \sim N(\beta x_i, \sigma^2)$, dove le x_i si suppongono fissate.

- 1 Si scrivano la funzione di verosimiglianza e di log-verosimiglianza per $\theta = (\beta, \sigma^2)$.
- 2 Si ottenga lo stimatore di massima verosimiglianza di θ e se ne calcoli il valore per i dati osservati.
- 3 Si calcoli la derivata seconda della log-verosimiglianza rispetto a θ .

Esempio 2.2. Le osservazioni che seguono si riferiscono all'inquinamento atmosferico registrato in 53 città italiane. In particolare, la variabile Y misura in microgrammi/metro³ la concentrazione media annua di biossido di zolfo (SO_2):

$y = (6.7799, 6.0141, 2.3891, 0.9817, 3.3384, 5.3363, 1.2274, 3.7378, 4.1574, 7.5315, 6.8971, 5.6222, 3.2202, 3.7482, 4.7032, 3.1935, 3.5361, 7.0275, 4.3589, 3.0664, 8.8281, 3.4695, 3.4470, 7.9581, 3.7190, 3.3961, 9.0582, 5.1762, 6.7417, 2.5557, 5.1762, 6.7417, 2.5557, 7.7905, 1.7145, 2.4070, 6.9218, 4.2567, 5.0736, 6.4474, 8.7040, 3.5854, 2.6791, 3.4598, 5.7002, 5.3849, 5.2398, 7.2526, 4.9982, 3.9164, 7.9081, 2.6735, 2.4015)$

Si assuma che il campione sia casuale semplice da una distribuzione esponenziale con media μ .

- 1 Si scriva la funzione di log-verosimiglianza per μ .
- 2 Si ottenga lo stimatore di massima verosimiglianza di μ .

- 3 S ottenga un intervallo di confidenza con livello approssimato 0.95 per μ .
- 4 Si risponda ai quesiti 1-3 se l'interesse è rivolto a $\lambda = 1/\mu$.
- 5 Si risponda ai quesiti 1-2 nell'ipotesi in cui y sia un campione casuale semplice da una distribuzione gamma con funzione di densità $p(y; \lambda, \alpha) = \lambda^\alpha y^{\alpha-1} \exp(-\lambda y) / \Gamma(\alpha)$, con $y > 0$, $\lambda > 0$ e $\alpha = 5$.