INFERENZA STATISTICA II

Homework 1

Soluzione

Nota Bene. Si danno qui solo i risultati per i singoli quesiti, sono omessi i passaggi ed i commenti, che naturalmente lo studente è invitato a presentare con cura. Tutti i risultati numerici sono stati arrotondati alla seconda cifra decimale.

Esercizio 1.1.

1. Stime puntuali per i parametri μ e σ^2 sono $\bar{y} = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} y_i = 3.75$ e $s^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{11}(y_i - \bar{y})^2 = 0.47$. Commentare.
2. Poiché $t_{10,0.975} = 2.22$, un intervallo di confidenza con livello 0.95 per μ è
$$\left(\bar{y} \pm t_{10,0.975}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(3.75 \pm 2.22\frac{0.69}{\sqrt{11}}\right) = (3.29, 4.22)\ .$$
3. Poiché $t_{10,0.995} = 3.16$, un intervallo di confidenza con livello 0.99 per μ è
$$\left(\bar{y} \pm t_{10,0.995}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(3.75 \pm 3.16\frac{0.69}{\sqrt{11}}\right) = (3.09, 4.41)\ .$$
Commentare.
4. Per la verifica di $H_0 : \mu = \mu_0 = 3.5$ contro l'alternativa $H_1 : \mu \neq 3.5$, il valore osservato della funzione test $T = (\bar{Y} - \mu_0)/(S/\sqrt{n})$ è $t^{oss} = 1.22$. Il livello di significatività osservato risulta pari a $\alpha^{oss} = 0.25$ e tale valore indica che i dati sono conformi con l'ipotesi nulla.

   Se il test è con livello α fissato, un test bilaterale basato su T rifiuta H_0 se $|t^{oss}| > t_{n-1,1-\alpha/2}$. Per $\alpha = 0.05$ e $t_{10,0.975} = 2.22$, risulta $|t^{oss}| = |1.22| < 2.22$ e l'ipotesi nulla non viene rifiutata al livello 0.05.

Esercizio 1.2.

1. Poiché $t_{59,0.975} = 2.00$, un intervallo di confidenza con livello 0.95 per μ è
$$\left(\bar{y} \pm t_{59,0.975}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(179.3 \pm 2.00\frac{7}{\sqrt{60}}\right) = (177.49, 181.11)\ .$$
Poiché $t_{59,0.95} = 1.67$, un intervallo di confidenza con livello 0.90 per μ è
$$\left(\bar{y} \pm t_{59,0.95}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(179.3 \pm 1.67\frac{7}{\sqrt{60}}\right) = (177.79, 180.81)\ .$$
Commentare.

2. Poiché $t_{59,0.975} = 2.00$, un intervallo di confidenza con livello 0.95 per μ è

$$\left(\bar{y} \pm t_{59,0.975}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(179.3 \pm 2.00\frac{6}{\sqrt{60}}\right) = (177.75, 180.85) \ .$$

Commentare.

3. Per la verifica di $H_0 : \mu = \mu_0 = 180$ contro l'alternativa $H_1 : \mu < 180$, il valore osservato della funzione test $T = (\bar{Y} - \mu_0)/(S/\sqrt{n})$ è $t^{oss} = (179.3-180)/(7/\sqrt{60}) = -0.77$. Il livello di significatività osservato risulta pari a $\alpha^{oss} = 0.22$ e tale valore indica che i dati sono conformi con l'ipotesi nulla. Commentare.

Esercizio 1.3.

1. Una valutazione puntuale ragionevole di λ è $\bar{y} = \frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18} y_i = 120.67$.
2. Poiché $z_{0.975} = 1.96$, un intervallo di confidenza con livello approssimato 0.95 per λ è

$$\left(\bar{y} \pm z_{0.975}\frac{\sqrt{\bar{y}}}{\sqrt{n}}\right) = \left(120.67 \pm 1.96\sqrt{6.70}\right) = (115.60, 125.74) \ .$$

3. Per la verifica di $H_0 : \lambda = \lambda_0 = 122$ contro l'alternativa $H_1 : \lambda \neq 122$, il valore osservato della funzione test $T = (\bar{Y} - \lambda_0)/(\lambda_0/\sqrt{n})$ è $t^{oss} = -0.51$. Il livello di significatività osservato risulta pari a $\alpha^{oss} = 0.61$ e tale valore indica che i dati sono conformi con l'ipotesi nulla.

   Se il test è con livello approssimato α fissato, un test bilaterale basato su T rifiuta H_0 se $|t^{oss}| > z_{1-\alpha/2}$. Per $\alpha = 0.05$ e $z_{0.975} = 1.96$, vale $|t^{oss}| = |0.51| < 1.96$ e l'ipotesi nulla non viene rifiutata al livello approssimato 0.05.

Esercizio 1.4.

Per costruzione Z è una variabile casuale binomiale con parametri $n = 30$ e $\pi = \pi(\lambda) = Pr_\lambda(Y > 0) = 1 - Pr_\lambda(Y = 0) = 1 - \exp(-\lambda)$. Da quest'ultima espressione risulta $\lambda = \lambda(\pi) = -\log(1-\pi)$.

1. Una valutazione puntuale ragionevole di π è $\hat{\pi} = 24/30 = 0.8$, da cui risulta che una stima puntuale ragionevole per λ è $\hat{\lambda} = -\log(1-\hat{\pi}) = -\log 0.2 = 1.61$.

2. È noto che $\sqrt{n}(\hat{\pi} - \pi) \approx N(0, \pi(1-\pi))$. Per $n = 30$ e $\hat{\pi} = 0.8$, la distribuzione approssimata di $\hat{\pi}$ è una $N(\pi, 0.073^2)$.

   Poiché $z_{0.975} = 1.96$, un intervallo di confidenza con livello approssimato 0.95 per π è

   $$(0.8 \pm 1.96 \times 0.073) = (0.66, 0.94)\ .$$

   Pertanto, un intervallo di confidenza con livello approssimato 0.95 per λ è

   $$(-\log(1-0.66), -\log(1-0.94)) = (1.08, 2.81)\ .$$

3. La verifica di $H_0 : \lambda = \lambda_0 = 9$ contro l'alternativa $H_1 : \lambda \neq 9$, è equivalente alla verifica dell'ipotesi nulla $H_0 : \pi = \pi_0 = 0.99$ contro l'alternativa $H_1 : \pi \neq 0.99$, in quanto $\pi(\lambda_0) = \pi(9) = 0.99$. Il valore osservato della funzione test $T = (\hat{\pi} - \pi_0)/\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)/n}$ è $t^{oss} = -96.02$. Il livello di significatività osservato risulta pari a $\alpha^{oss} = 0$ e tale valore indica che i dati non sono conformi con l'ipotesi nulla.

   Se il test è con livello approssimato α fissato, un test bilaterale basato su T rifiuta H_0 se $|t^{oss}| > z_{1-\alpha/2}$. Per $\alpha = 0.05$ e $z_{0.975} = 1.96$, vale $|t^{oss}| = |-96.02| > 1.96$ e l'ipotesi nulla viene rifiutata al livello approssimato 0.05.