INFERENZA STATISTICA II

Homework 3

Soluzione

Nota Bene. Si danno qui solo i risultati per i singoli quesiti, sono omessi i passaggi ed i commenti, che naturalmente lo studente è invitato a presentare con cura. Tutti i risultati numerici sono stati arrotondati.

Esercizio 3.1.

La funzione di log-verosimiglianza per μ è $\ell(\mu) = -1/(2\sigma_0^2)\sum_{i=1}^n (y_i - a\mu)^2$. La funzione punteggio per μ è $\ell_*(\mu) = (a/\sigma_0^2)\sum_{i=1}^n y_i - (na^2\mu)/\sigma_0^2$, da cui si ricava che lo stimatore di massima verosimiglianza di μ è $\hat{\mu} = \bar{Y}/a$. Per $a = 2$ e $\bar{y} = 10.63$, risulta $\hat{\mu} = 5.135$. La derivata seconda della log-verosimiglianza per μ è $\ell_{**}(\mu) = -(na^2)/\sigma_0^2$ e, poiché $\ell_{**}(\hat{\mu}) < 0$, $\hat{\mu}$ è un punto di massimo.

1. L'informazione osservata per μ è

$$j(\mu) = -\ell_{**}(\mu) = \frac{na^2}{\sigma_0^2} \ .$$

   Poiché $E_\mu(j(\mu)) = j(\mu)$, l'informazione osservata e attesa per μ coincidono, ossia $i(\mu) = j(\mu)$.

2. La distribuzione approssimata di $\hat{\mu}$ è una normale con media μ e varianza asintotica $j(\hat{\mu})^{-1} = \sigma_0^2/(na^2)$. Tale distribuzione coincide con quella esatta (si veda l'Esercizio 2.1).

3. Per la verifica di $H_0 : \mu = \mu_0 = 7$ contro l'alternativa $H_1 : \mu < 7$, il valore osservato della funzione test $T = (\hat{\mu} - \mu_0)/\sqrt{\sigma_0^2/(na^2)}$ è $t^{oss} = (5.135 - 7)/\sqrt{15/(10 \times 4)} = -3.05$. Il livello di significatività osservato risulta pari a $\alpha^{oss} = 0.001 < 0.05$ e tale valore indica che i dati non sono conformi con l'ipotesi nulla.

Esercizio 3.2.

La funzione di log-verosimiglianza per σ^2 è

$$\ell(\sigma^2) = -\frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{k}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 + \frac{1}{a}\sum_{j=1}^k x_j^2\right) \ .$$

La funzione punteggio per σ^2 è

$$\ell_*(\sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} - \frac{k}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{k} x_j^2\right) ,$$

da cui si ricava che lo stimatore di massima verosimiglianza di σ^2 è

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n+k}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{k} x_j^2\right) .$$

Per $a = 2$ ed i campioni osservati, risulta $\hat{\sigma}^2 = 6.274$. La derivata seconda della log-verosimiglianza per σ^2 è

$$\ell_{**}(\sigma^2) = \frac{n+k}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{k} x_j^2\right)$$

e, poiché $\ell_{**}(\hat{\sigma}^2) < 0$, $\hat{\sigma}^2$ è un punto di massimo.

1. L'informazione osservata per σ^2 è

   $$j(\sigma^2) = -\ell_{**}(\sigma^2) = -\frac{n+k}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^6}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{k} x_j^2\right) .$$

   L'informazione attesa per σ^2 è

   $$i(\sigma^2) = E_{\sigma^2}(j(\sigma^2)) = \frac{n+k}{2\sigma^4} ,$$

   poiché $E_{\sigma^2}(Y^2) = \sigma^2$ e $E_{\sigma^2}(X^2) = a\sigma^2$.

2. La distribuzione approssimata di $\hat{\sigma}^2$ è una normale con media σ^2 e varianza asintotica $j(\hat{\sigma}^2)^{-1} = (2\hat{\sigma}^4)/(n+k)$.

3. Un intervallo di confidenza per σ^2 con livello approssimato 0.95 è

   $$\left(\hat{\sigma}^2 \pm z_{0.975}\sqrt{\frac{2\hat{\sigma}^4}{n+k}}\right) = (6.274 \pm 1.96 \times 2.371) = (1.63, 10.92) .$$

   Il valore $\sigma^2 = 1$ non appartiene all'intervallo di confidenza. Pertanto, per la verifica di $H_0 : \sigma^2 = 1$ contro l'alternativa $H_1 : \sigma^2 \neq 1$, si rifiuta l'ipotesi nulla con livello $\alpha = 0.05$.

Esercizio 3.3.

La funzione di log-verosimiglianza per θ è $\ell(\theta) = y\log(0.5-\theta)+(n-y)\log(0.5+\theta)$, e la funzione punteggio per θ è $\ell_*(\theta) = -y/(0.5-\theta)+(n-y)/(0.5+\theta)$. Lo stimatore di massima verosimiglianza per θ è $\hat{\theta} = 0.5 - Y/n$. Per $n = 100$ e $y = 40$, risulta $\hat{\theta} = 0.1$. La derivata seconda della log-verosimiglianza rispetto a θ è

$$\ell_{**}(\theta) = -\frac{y}{(0.5-\theta)^2} - \frac{(n-y)}{(0.5+\theta)^2}$$

e, poiché $\ell_{**}(\hat{\theta}) < 0$, $\hat{\theta}$ è un punto di massimo.

1. L'informazione osservata per θ è

$$j(\theta) = -\ell_{**}(\theta) = \frac{y}{(0.5-\theta)^2} + \frac{(n-y)}{(0.5+\theta)^2} \ .$$

2. L'informazione attesa per θ è

$$i(\theta) = E_\theta(j(\theta)) = \frac{n}{(0.5-\theta)(0.5+\theta)} \ ,$$

   essendo $E_theta(Y) = n(0.5-\theta)$.

3. La distribuzione approssimata di $\hat{\theta}$ è una normale con media θ e varianza asintotica $j(\hat{\theta})^{-1} = ((40/0.4^2) + (60/0.6^2))^{-1} = 0.0024$. Un intervallo di confidenza per θ con livello approssimato 0.99 è

$$\left(\hat{\theta} \pm z_{0.995}\sqrt{j(\hat{\theta})^{-1}}\right) = (0.1 \pm 2.58 \times 0.049) = (-0.026, 0.226) \ .$$

4. Per la verifica di $H_0 : \theta = \theta_0 = 0$ contro $H_1 : \theta \neq 0$, il valore osservato della funzione test $T = (\hat{\theta} - \theta_0)/\sqrt{j(\theta_0)^{-1}}$ è $t^{oss} = (0.1-0)/20 = 0.005$. Con α fissato, un test bilaterale basato su T rifiuta H_0 se $|t^{oss}| > z_{1-\alpha/2}$. Per $\alpha = 0.01$ e $z_{0.995} = 2.58$, risulta $|t^{oss}| = |0.005| < 2.58$ e l'ipotesi nulla non viene rifiutata al livello 0.01.

Esercizio 3.4.

1. La funzione di log-verosimiglianza per α è $\ell(\alpha) = n\log\alpha + n\alpha\log\omega_0 - \alpha\sum_{i=1}^n \log y_i$. La funzione punteggio per α è $\ell_*(\alpha) = n/\alpha + n\log\omega_0 - \sum_{i=1}^n \log y_i$. Dall'equazione $\ell_*(\alpha) = 0$, si trova che lo stimatore di massima verosimiglianza per α è

$$\hat{\alpha} = -\frac{n}{n\log\omega_0 - \sum_{i=1}^n \log Y_i} \ .$$

   La derivata seconda della log-verosimiglianza rispetto a α è $\ell_{**}(\alpha) = -n/\alpha^2$ e, poiché $\ell_{**}(\hat{\alpha}) < 0$, $\hat{\alpha}$ è un punto di massimo.

2. L'informazione osservata per α è
$$j(\alpha) = -\ell_{**}(\alpha) = \frac{n}{\alpha^2} \ .$$

3. L'informazione attesa per θ è
$$i(\theta) = E_\theta(j(\theta)) = \frac{n}{\alpha^2} \ ,$$
ossia informazione osservata ed attesa coincidono.

4. La distribuzione approssimata di $\hat{\alpha}$ è una normale con media α e varianza asintotica $j(\hat{\alpha})^{-1} = \hat{\alpha}^2/n$. Un intervallo di confidenza per α con livello approssimato 0.95 è
$$\left(\hat{\alpha} \pm z_{0.975} \sqrt{\frac{\hat{\alpha}^2}{n}} \right) \ .$$

Esercizio 3.5.

1. Per definizione, la stima di massima verosimiglianza di π è quel valore $\hat{\pi}$ nello spazio campionario tale che $L(\hat{\pi}) \geq L(\pi)$. Poichè $L(\pi) \propto p(y;\pi)$, con i valori di $p(y;\pi)$ forniti nella tabella relativa al Lucido 1 della Lezione 3, al variare di y in $\mathcal{Y} = \{0, \ldots, 10\}$ la stima di massima verosimiglianza è

y	$\hat{\pi}(y)$
0	0.1
1	0.1
2	0.1
3	0.5
4	0.5
5	0.5
6	0.5
7	0.8
8	0.8
9	0.8
10	0.8

2. $\hat{\pi}(Y)$ è una variabile casuale che assume tre soli valori $x = 0.1, 0.5, 0.8$. È quindi una variabile casuale discreta con dominio $\mathcal{X} = \{0.1, 0.5, 0.8\}$. La sua distribuzione, quando il vero valore del parametro è $\pi = 0.1$ è
$$\begin{aligned} Pr_{\pi=0.1}(\hat{\pi}(Y) = 0.1) &= Pr_{\pi=0.1}(Y=0) + Pr_{\pi=0.1}(Y=1) + Pr_{\pi=0.1}(Y=2) \\ &= 0.3486784 + 0.3874205 + 0.1937102 = 0.9298092 \ , \\ Pr_{\pi=0.1}(\hat{\pi}(Y) = 0.5) &= Pr_{\pi=0.1}(Y=3) + Pr_{\pi=0.1}(Y=4) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + & & Pr_{\pi=0.1}(Y=5)+Pr_{\pi=0.1}(Y=6) \\
& = & & 0.0573956+0.0111603+0.0014880+0.0001378=0.0701817\ , \\
Pr_{\pi=0.1}(\hat{\pi}(Y)=0.8) & = & & Pr_{\pi=0.1}(Y=7)+Pr_{\pi=0.1}(Y=8) \\
& + & & Pr_{\pi=0.1}(Y=9)+Pr_{\pi=0.1}(Y=10) \\
& = & & 1-Pr_{\pi=0.1}(\hat{\pi}(Y)=0.1)-Pr_{\pi=0.1}(\hat{\pi}(Y)=0.5) \\
& = & & 1-0.9298092-0.0701817=0.0000091\ .
\end{aligned}
$$

Concludendo, la distribuzione di $\hat{\pi}(Y)$ quando il vero valore del parametro è 0.1 è

x	$Pr_{\pi=0.1}(\hat{\pi}(Y)=x)$
0.1	0.9298092
0.5	0.0701817
0.8	0.0000091

3. Il valore atteso di $\hat{\pi}(Y)$, quando $\pi=0.1$, è

$$E_{\pi=0.1}(\hat{\pi}(Y))=0.1\times0.9298092+0.5\times0.0701817+0.8\times0.0000091=0.128\ .$$

Lo stimatore è non distorto se $E_{\pi}(\hat{\pi}(Y))=\pi$ per ogni π. Ma poichè $E_{\pi=0.1}(\hat{\pi}(Y))=0.128\neq0.1$, lo stimatore è distorto.