Esempio 5.1. In un esperimento con un dado, si conta il numero di tentativi effettuati prima di ottenere un numero maggiore di due. In $n = 25$ esperimenti indipendenti si sono ottenuti i seguenti risultati

$$y = (0, 1, 0, 6, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 1, 0, 4, 0, 1, 1, 2, 3, 6, 4, 0, 3, 7, 1)\ .$$

Si assuma che y sia un campione casuale semplice tratto da una distribuzione geometrica con funzione di probabilità $p(y; \pi) = \pi(1-\pi)^y$, con $0 < \pi < 1$ e $y = 0, 1, 2, \ldots$.

1 Si scriva la funzione di log-verosimiglianza per π e si calcoli la stima di massima verosimiglianza di π.

2 Si trovino l'informazione osservata e l'informazione attesa per π.

3 Si determini un intervallo di confidenza per π con livello 0.95, basato sulla distribuzione approssimata dello stimatore di massima verosimiglianza.

4 Si determini un intervallo di confidenza per π con livello 0.95, basato sulla distribuzione approssimata di $W(\pi)$.

5 Si determini un intervallo di confidenza per π con livello 0.95, basato sulla distribuzione approssimata della statistica radice con segno di $W(\pi)$, $r(\pi)$.

6 Utilizzando la distribuzione approssimata di $W(\pi)$, si ottenga un test con livello approssimato $1 - \alpha = 0.95$, per verificare l'ipotesi nulla $H_0 : \pi = 0.6$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \pi \neq 0.6$. Si calcoli il livello di significatività osservato.

7 Utilizzando la distribuzione approssimata di $r(\pi)$, si ottenga un test con livello approssimato $1 - \alpha = 0.95$, per verificare l'ipotesi nulla $H_0 : \pi = 0.6$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \pi > 0.6$. Si calcoli il livello di significatività osservato.

Esempio 5.2. Sia

$$y = (143, 138, 152, 145, 146, 141, 139, 153, 137, 150, 144, 146)$$

un campione casuale semplice da una variabile casuale con distribuzione normale con media μ e varianza σ^2, con $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$, ignoti.

1 Si scriva la funzione di log-verosimiglianza per $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

2 Si calcoli la stima di massima verosimiglianza di θ.

3 Si determini una regione di confidenza per θ con livello 0.95, basato sulla distribuzione approssimata di $W(\theta)$.

4 Utilizzando la distribuzione approssimata di $W(\theta)$, si ottenga un test con livello approssimato $1 - \alpha = 0.95$, per verificare l'ipotesi nulla $H_0 : \mu = 143$ e $\sigma^2 = 42.25$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \mu \neq 143$ o $\sigma^2 \neq 42.25$. Si calcoli il livello di significatività osservato.

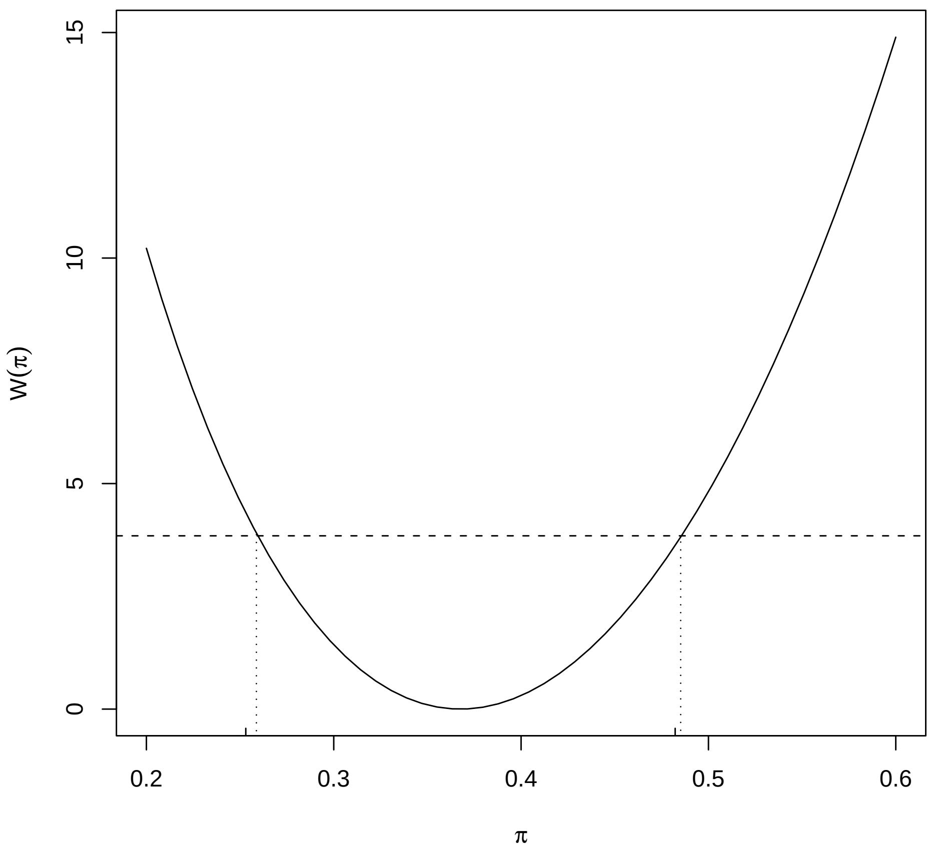

Figura 1: Esempio 5.1. Intervallo di confidenza con livello 0.95 per π, basato su $W(\pi)$.

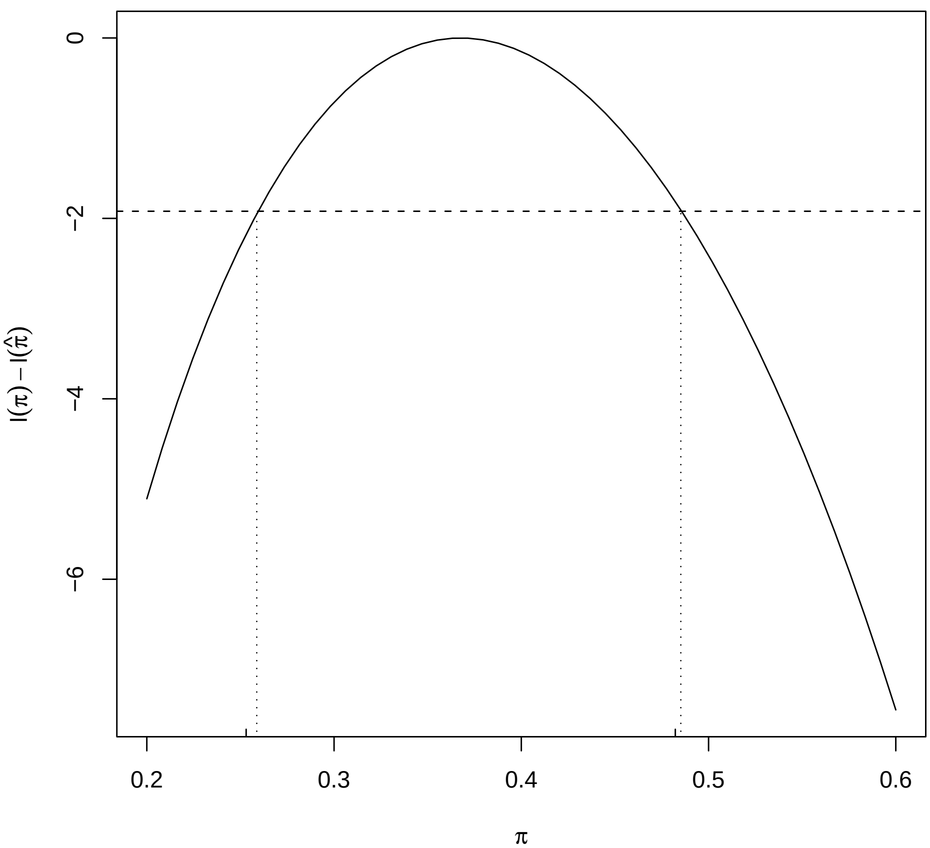

Figura 2: Esempio 5.1. Intervallo di confidenza con livello 0.95 per π, basato sulla log-verosimiglianza relativa.

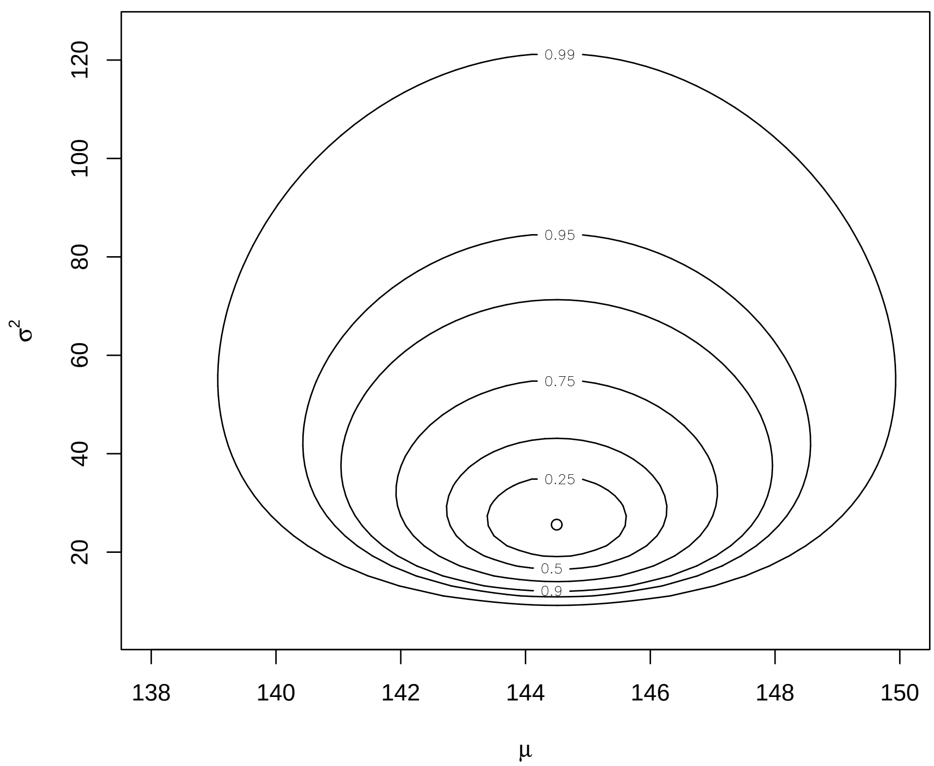

Figura 3: Esempio 5.2. Regioni di confidenza per $\theta = (\mu, \sigma^2)$, basate su $W(\theta)$.