INFERENZA STATISTICA II
Prova d'esame del 9 settembre 2002
Soluzione

Nota bene: Si danno qui solo i risultati per i singoli quesiti, sono omessi i passaggi, che naturalmente lo studente deve includere nel compito scritto d'esame.

ESERCIZIO 1

Nota. Si può osservare che $y_1, \ldots, y_n, z_1 - a, \ldots, z_m - a$ è un campione casuale semplice da una $N(\mu, \sigma^2)$. Si possono dunque applicare a tale campione tutti i risultati ben noti per l'inferenza sui parametri di una distribuzione normale.

(a)

- $\Theta = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$
- $L(\theta) = L(\mu, \sigma^2) = (\sigma^2)^{-(n+m)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2 + \sum_{j=1}^{m}(z_j - \mu - a)^2\right]\right\}$
- $l(\theta) = l(\mu, \sigma^2) = -\frac{n+m}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2 + \sum_{j=1}^{m}(z_j - \mu - a)^2\right].$

(b)

- $\frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu) + \sum_{j=1}^{m}(z_j - \mu - a)\right]$

  $\frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n+m}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2 + \sum_{j=1}^{m}(z_j - \mu - a)^2\right]$

- $j(\mu, \sigma^2) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu \partial \sigma^2} \\ \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu \partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 l(\mu, \sigma^2)}{\partial (\sigma^2)^2} \end{pmatrix}$

  con

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu^2} &= -\frac{n+m}{\sigma^2}, \\
\frac{\partial^2 l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu \partial \sigma^2} &= -\frac{1}{\sigma^4}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu) + \sum_{j=1}^{m}(z_j - \mu - a)\right), \\
\frac{\partial^2 l(\mu, \sigma^2)}{\partial (\sigma^2)^2} &= \frac{n+m}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2 + \sum_{j=1}^{m}(z_j - \mu - a)^2\right).
\end{aligned}
$$

- $i(\mu, \sigma^2) = \begin{pmatrix} i_{\mu\mu} & i_{\mu\sigma^2} \\ i_{\mu\sigma^2} & i_{\sigma^2\sigma^2} \end{pmatrix}$

  con

$$
\begin{aligned}
i_{\mu\mu} &= \frac{n+m}{\sigma^2}, \\
i_{\mu\sigma^2} &= 0, \\
i_{\sigma^2\sigma^2} &= \frac{n+m}{2\sigma^4}.
\end{aligned}
$$

(c) $\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \hat{\sigma^2})$, con

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i + \sum_{j=1}^m (z_j - a)}{n+m} = 1.29$$

$$\hat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu})^2 + \sum_{j=1}^m (z_j - \hat{\mu} - a)^2}{n+m} = 0.27$$

(d) $W_P(\mu)\,|_{\mu=1} = 2(l(\hat{\mu}, \hat{\sigma^2}) - l(\mu, \hat{\sigma^2}_0)$, con

$$\hat{\sigma^2}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - 1)^2 + \sum_{j=1}^m (z_j - 1 - a)^2}{n+m} = 0.36\,.$$

Risulta $W_P(\mu)\,|_{\mu=1} = 2.54$

(e) L'approssimazione $W_P(\mu) \dot{\sim} \chi^2_1$ sotto H_0 fornisce $\alpha^{oss} \doteq 0.11$.

Tuttavia la numerosità campionaria è molto piccola. È noto dai risultati relativi alla distribuzione normale che

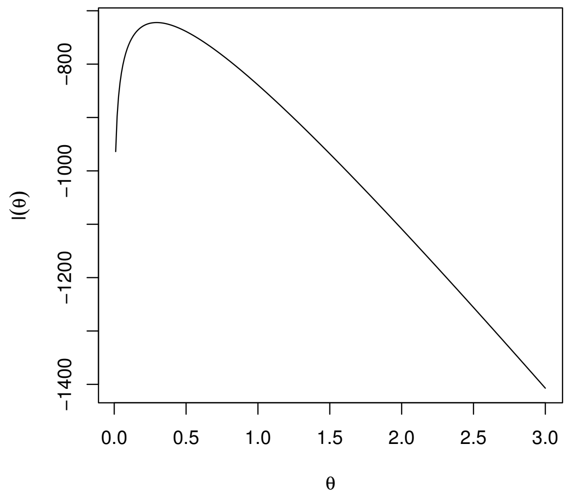
$$t = \frac{\sqrt{n+m}(\hat{\mu} - 1)}{s_n}\,,$$

dove $s_n^2 = ((n+m)/(n+m-1))\hat{\sigma}^2$, ha distribuzione nulla t_{n+m-1}.

Poiché risulta $t^{oss} = 1.59$, si ha il valore esatto $\alpha^{oss} = 2Pr(t_{n+m-1} \geq 1.59) = 0.15$.

ESERCIZIO 2

(a) $l(\theta) = 100\log(\theta) - 339\theta - 500$



(b) $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(\log y_1 - \log 5)} = 0.29$

(c) $\hat{\theta} \mathrel{\dot\sim} N(\theta, \hat{\jmath}^{-1})$, con $\hat{\jmath}^{-1} = 0.029^2$.

(d) L'intervallo è $(0.23, 0.35)$.

(e) $W(\theta) = 2\left\{100\log\frac{0.29}{\theta} - 339(0.29-\theta)\right\}$

(f) $\hat{\Theta}(y) = \{\theta > 0 : W(\theta) \leq 3.84\} = \{\theta > 0 : 339\theta - 100\log(\theta) \leq 224.02\}$