INFERENZA STATISTICA II
Prova d'esame del 20 novembre 2001
Soluzione

Nota bene: Si danno qui solo i risultati per i singoli quesiti, sono omessi i passaggi, che naturalmente lo studente deve includere nel compito scritto d'esame.

ESERCIZIO 1

(a) $l(\lambda) = -n\lambda + \log\lambda \sum_{i=1}^{n} y_i = -20\lambda + 183\log\lambda\,.$

(b) $\hat\lambda = \hat\lambda(y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i\,, \qquad \hat\lambda = \hat\lambda(y^{oss}) = \dfrac{183}{20} = 9.15\,.$

(c) $j(\lambda) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\lambda^2}\,, \qquad i(\lambda) = E_\lambda\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{\lambda^2}\right) = \dfrac{n}{\lambda}\,.$

(d) $\hat\lambda = \hat\lambda(Y) \dot\sim N(\lambda, j\,(\hat\lambda)^{-1})\,,$ sotto λ, ossia $\hat\lambda \dot\sim N(\lambda, 0.4575)\,,$ sotto $\lambda\,.$

(e) $\hat\lambda \pm 1.96\sqrt{j(\hat\lambda)^{-1}}\,,$
ossia $9.15 \pm 1.96\sqrt{0.4575}$ che dà l'intervallo $(7.82, 10.48)$.

(f) $W(\lambda)\,|_{\lambda=10} = 2\left(-20\hat\lambda + 183\log\hat\lambda + 20\times 10 - 183\log 10\right) = 1.49.$
Poiché risulta $1.49 < \chi^2_{1;0.95} = 3.84$, l'ipotesi nulla non viene rifiutata.

(g) $\alpha^{oss} \doteq 0.22$. Con le tavole, $\alpha^{oss} \in (0.2, 0.5)$.

ESERCIZIO 2

(a) $L(\beta,\sigma^2) = (\sigma^2)^{-n/2}\exp\left\{-\dfrac{1}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta x_i)^2\right\}\,,$

$l(\beta,\sigma^2) = -\dfrac{n}{2}\log\sigma^2 - \dfrac{1}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta x_i)^2\,.$

(b) $\hat{\theta} = (\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2)$, con

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta} x_i)^2 \,.$$

Con i dati osservati, $\hat{\beta} = 1.81$, $\hat{\sigma}^2 = 29.55$.

(c) Si ottiene

$$j(\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^2} & \dfrac{\sum_{i=1}^n (y_i - \beta x_i) x_i}{\sigma^4} \\ \dfrac{\sum_{i=1}^n (y_i - \beta x_i) x_i}{\sigma^4} & -\dfrac{n}{2\sigma^4} + \dfrac{\sum_{i=1}^n (y_i - \beta x_i)^2}{\sigma^6} \end{pmatrix} .$$

Poiché risulta $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta} x_i) x_i = 0$ (si verifica sostituendo l'espressione di $\hat{\beta}$), si ha

$$j\,(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\hat{\sigma}^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76.44 & 0 \\ 0 & 0.005153 \end{pmatrix} ,$$

da cui segue il risultato su $j\,(\hat{\theta})^{-1}$.

(d) $\hat{\theta} = \hat{\theta}(Y) \dot{\sim} N_2 \left(\begin{pmatrix} \beta \\ \sigma^2 \end{pmatrix} , j\,(\hat{\theta})^{-1} \right)$, sotto θ,

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}(Y) \dot{\sim} N(\beta,\, 0.013)\,, \quad \text{sotto } \theta\,.$$

(e) $\hat{\beta} \pm 1.96\sqrt{(j(\hat{\theta})^{-1})_{11}}$,
ossia $1.81 \pm 1.96\sqrt{0.013}$ che dà l'intervallo $(1.6, 2.03)$.

(f) $W_P(\beta)\Big|_{\beta=0} = 2\left[l(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2) - l(0, \hat{\sigma}_0^2) \right]$,
con $\hat{\sigma}_0^2$ stima di massima verosimiglianza di σ^2 sotto H_0.
Risulta $\hat{\sigma}_0^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} = 852.11$
e dunque $W_P(\beta)\Big|_{\beta=0} = 30.24$.
Poiché $30.24 > \chi^2_{1;0.95} = 3.84$, l'ipotesi nulla viene rifiutata.

(g) $\alpha^{oss} \doteq 0$.

(h) L'intervallo è

$$\{\beta \in \mathbb{R} \,:\, W_P(\beta) \le 3.84\}\,,$$

con

$$W_P(\beta) = 2\left[l(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2) - l(\beta, \hat{\sigma}^2_\beta)\right] \, ,$$

dove $\hat{\sigma}^2_\beta = \dfrac{\sum_{i=1}^n (y_i - \beta x_i)^2}{n}$.

Poiché risulta $l(\hat{\beta}, \hat{\sigma}^2) = -10.74$ e $l(\beta, \hat{\sigma}^2_\beta) = -\dfrac{n}{2}\log \hat{\sigma}^2_\beta - \dfrac{n}{2}\,,$
Si ottiene per l'intervallo l'espressione semplificata

$$\left\{\beta \in \mathbb{R} \, : \, \sum_{i=1}^n (y_i - \beta x_i)^2 \leq 55.18\right\} \, .$$