INFERENZA STATISTICA II

Prova d'esame del 24 settembre 2002

1. Sia $y = (y_1, \ldots, y_n)$ un campione casuale semplice da una variabile casuale avente distribuzione esponenziale con media μ e sia $z = (z_1, \ldots, z_n)$ un campione casuale semplice, indipendente dal precedente, da una variabile casuale distribuita come un'esponenziale con media $\lambda\mu$, dove μ e λ sono parametri ignoti e positivi.

   (a) Si indichi lo spazio parametrico Θ e si scrivano la funzione di verosimiglianza e log-verosimiglianza per $\theta \in \Theta$.

   (b) Si ottengano la funzione di punteggio, l'informazione osservata e l'informazione attesa.

   (c) Si ottenga la stima di massima verosimiglianza di θ con $n = 6$, $y = (9, 186, 25, 6, 44, 115)$ e $z = (1, 18, 6, 25, 14, 45)$, dove y esprime i tempi di sopravvivenza (in settimane) di 6 soggetti che hanno subito il trattamento A e z esprime i tempi di sopravvivenza (in settimane) di 6 soggetti che hanno subito il trattamento B.

   (d) Con i dati del punto (c), si calcoli il test $W_p(\lambda)$ per $H_0 : \lambda = 1$ contro $H_1 : \lambda \neq 1$.

   (e) Si calcoli il livello di significatività osservato del test ottenuto al punto precedente. I dati contraddicono significativamente l'ipotesi di parità dei due trattamenti?

2. Siano $y_1, \ldots, y_{30}$ realizzazioni indipendenti di una variabile casuale Y avente distribuzione continua con densità

$$p(y; \theta) = \theta(1 - y)^{\theta - 1}, \qquad \theta > 0,\ y \in (0, 1).$$

   In particolare, si è ottenuto $\sum_{i=1}^{30} \log(1 - y_i) = -11$.

   (a) Si scriva la funzione di log-verosimiglianza per θ e se ne tracci il grafico.

   (b) Si ottenga lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\theta}$ per θ e se ne calcoli il valore con i dati osservati.

   (c) Si ottenga un'approssimazione per la distribuzione di $\hat{\theta}$.

   (d) Si sfrutti l'approssimazione ottenuta in (c) per determinare un intervallo di confidenza per θ con livello approssimato 0.95.

   (e) Si ottenga l'espressione della statistica log-rapporto di verosimiglianza $W(\theta)$.

   (f) Si ottenga un intervallo di confidenza con livello approssimato 0.95 per $\psi = Pr_\theta(Y \leq 0.5)$ a partire da $W(\theta)$.