Esempio 6.1. Si supponga assegnato un modello statistico i cui elementi sono indicizzati da due parametri reali, detti θ_1 e θ_2. A partire da un campione casuale semplice di numerosità elevata, è stata calcolata la funzione di log-verosimiglianza in alcuni punti, ottenendo i risultati riportati nella tabella che segue:

$l(\theta_1, \theta_2)$

	θ_1									
θ_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	18.1	20.3	21.4	24.1	24.5	24.2	23.7	22.4	22.1	21.8
1	18.7	21.2	23.9	25.2	26.5	26.3	25.8	25.7	25.6	22.7
2	19.3	22.7	23.8	26.3	28.5	27.2	25.1	24.6	23.7	23.6
3	20.2	24.3	25.9	25.8	27.5	24.2	23.1	22.2	20.1	19.8
4	19.1	24.2	25.6	23.1	24.5	24.2	22.8	22.4	22.3	21.8
5	17.1	21.3	22.4	23.3	23.2	23.2	20.7	19.8	18.1	17.1
6	15.1	18.4	21.5	22.1	22.0	21.9	20.1	19.4	18.0	17.8

Si assuma inoltre che sia possibile far riferimento alla teoria asintotica.

1 Si calcoli la stima di massima verosimiglianza di $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.

2 Si verifichi l'ipotesi nulla $H_0 : \theta_1 = 2$ e $\theta_2 = 1$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \theta_1 \neq 2$ o $\theta_2 \neq 1$ con livello di significatività 0.05, utilizzando la distribuzione approssimata di $W(\theta)$. Si calcoli un'approssimazione del livello di significatività osservato del test precedente.

3 Si disegni sul piano (θ_1, θ_2) una regione di confidenza per θ con livello 0.95, basata sulla distribuzione approssimata di $W(\theta)$.

4 Si verifichi l'ipotesi nulla $H_0 : \theta_1 = 2$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \theta_1 \neq 2$ con livello di significatività 0.05, utilizzando la distribuzione approssimata di $W_P(\theta_1)$.

5 Si calcoli un'approssimazione del livello di significatività osservato del test precedente.

6 Si determini una regione di confidenza per θ_1 con livello 0.95, basata sulla distribuzione approssimata di $W_P(\theta_1)$.

Esempio 6.2. Si consideri il seguente campione (si veda il Lucido 1 della Lezione 11)

$$\begin{aligned} y &= (0.446, 0.604, 2.137, 0.737, 0.996, 1.152, 1.124, 0.137, 0.982, 1.196, \\ &\quad 0.841, 0.636, 0.459, 0.947, 0.037, 1.307, 0.858, 0.164, 0.444, 0.623)\,. \end{aligned}$$

Si assuma che y sia un campione casuale semplice da una variabile casuale con distribuzione di Weibull con parametro (γ, λ) e densità

$$p_{Y_i}(y_i; \gamma, \lambda) = \lambda \gamma y_i^{\gamma-1} e^{-\lambda y_i^\gamma}\ ,\ y_i > 0\ ,\ \gamma, \lambda > 0\ .$$

La stima di massima verosimiglianza è pari a $(\hat{\gamma}, \hat{\lambda}) = (1.64, 1.24)$ (ottenuta numericamente).

1 Si verifichi l'ipotesi nulla $H_0 : \gamma = 1$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \gamma \neq 1$, utilizzando la distribuzione approssimata di $W_P(\gamma)$ e con livello fissato 0.05.

2 Si calcoli un'approssimazione del livello di significatività osservato del test al punto precedente.

3 Si ottenga un intervallo di confidenza per γ con livello 0.95, utilizzando la distribuzione approssimata di $W_P(\gamma)$.

4 Si verifichi l'ipotesi nulla $H_0 : \gamma = 1$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \gamma > 1$, utilizzando la distribuzione approssimata di $r_P(\gamma)$ e con livello fissato 0.05.

Esempio 6.3. Sia

$$y = (143, 138, 152, 145, 146, 141, 139, 153, 137, 150, 144, 146)$$

un campione casuale semplice da una variabile casuale normale con media μ e varianza σ^2 (si veda l'Esempio 5.2).

1 Si verifichi l'ipotesi nulla $H_0 : \sigma^2 = 50$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \sigma^2 \neq 50$ con livello di significatività 0.05, utilizzando la distribuzione approssimata di $W_P(\sigma^2)$.

2 Si calcoli un'approssimazione del livello di significatività osservato del test precedente.

3 Si determini un intervallo di confidenza per σ^2 con livello 0.95, basato sulla distribuzione approssimata di $W_P(\sigma^2)$.

4 Si verifichi l'ipotesi nulla $H_0 : \sigma^2 = 50$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \sigma^2 < 50$ con livello di significatività 0.05, utilizzando la distribuzione approssimata di $r_P(\sigma^2)$.

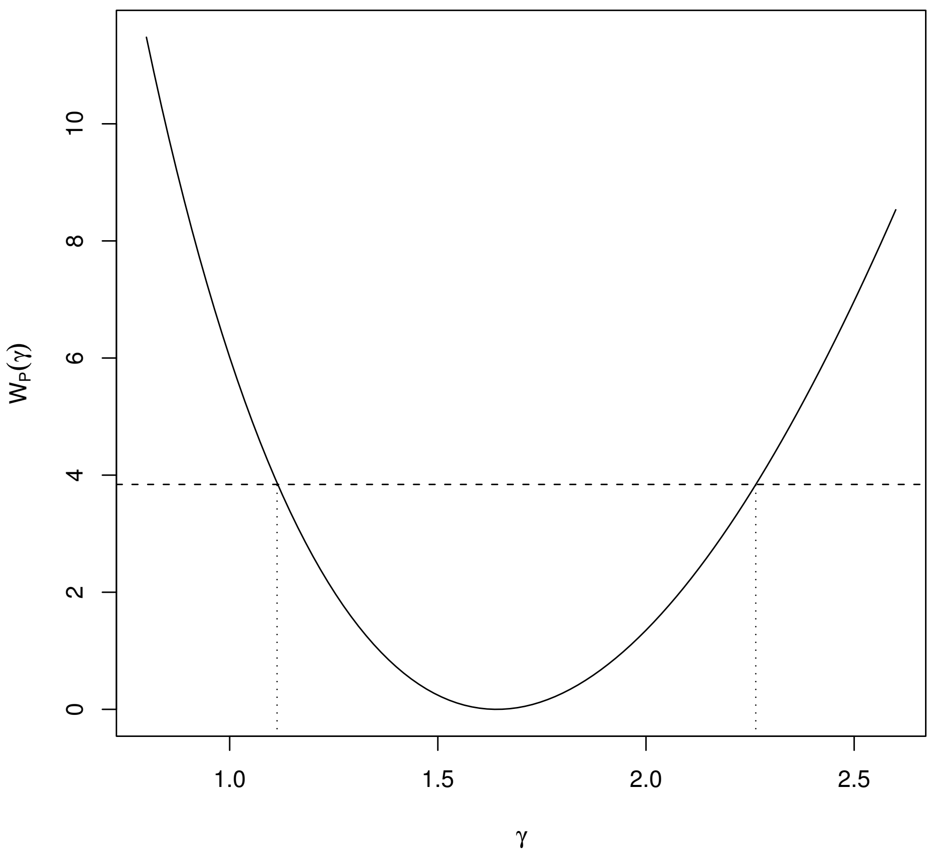

Figure 1: Esempio 6.2. Intervallo di confidenza con livello 0.95 per γ, basato su $W_P(\gamma)$.

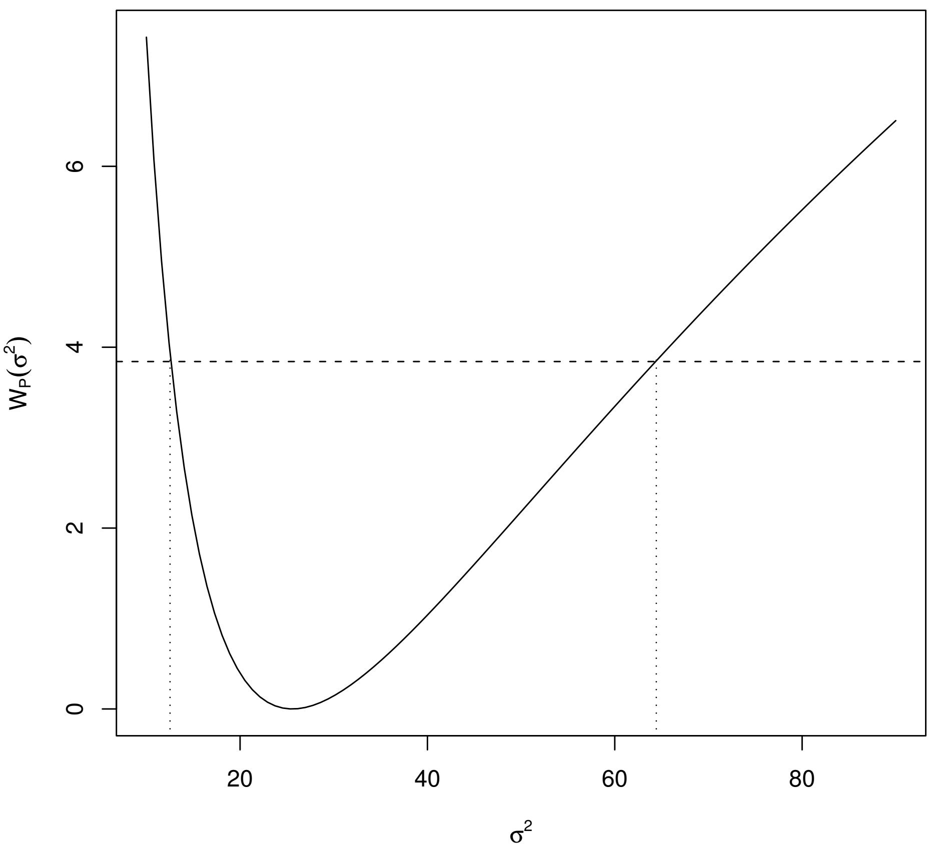

Figure 2: Esempio 6.3. Intervallo di confidenza con livello 0.95 per σ^2, basato su $W_P(\sigma^2)$.