# INFERENZA STATISTICA II

## Homework 2

### Soluzione

**Nota Bene.** Si danno qui solo i risultati per i singoli quesiti, sono omessi i passaggi ed i commenti, che naturalmente lo studente è invitato a presentare con cura. Tutti i risultati numerici sono stati arrotondati.

### Esercizio 2.1.

1. La funzione di verosimiglianza per $\mu$ è

$$L(\mu) = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a\mu)^2\right\} .$$

   La funzione di log-verosimiglianza per $\mu$ è

$$\ell(\mu) = -\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a\mu)^2 .$$

2. La funzione punteggio per $\mu$ è

$$\ell_*(\mu) = \frac{a}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{na^2\mu}{\sigma_0^2} ,$$

   da cui si ricava che lo stimatore di massima verosimiglianza di $\mu$ è $\hat{\mu} = \bar{y}/a$. Per $a = 2$ e $\bar{y} = 10.63$, risulta $\hat{\mu} = 5.315$.

3. La derivata seconda della log-verosimiglianza per $\mu$ è

$$\ell_{**}(\mu) = -\frac{na^2}{\sigma_0^2} .$$

   Essendo $\ell_{**}(\hat{\mu}) < 0$, $\hat{\mu}$ è un punto di massimo. Poichè $\bar{Y} \sim N(a\mu, \sigma_0^2/n)$, la distribuzione esatta di $\hat{\mu} = \bar{Y}/a$ è una $N(\mu, \sigma_0^2/(a^2 n))$.

**Esercizio 2.2.**

1. La funzione di verosimiglianza per $\sigma^2$ è

$$L(\sigma^2) = \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right\} \left(\frac{1}{a\sigma^2}\right)^{k/2} \exp\left\{-\frac{1}{2a\sigma^2}\sum_{j=1}^{k} x_j^2\right\} .$$

La funzione di log-verosimiglianza per $\sigma^2$ è

$$\ell(\sigma^2) = -\frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{k}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{k} x_j^2\right) .$$

2. La funzione punteggio per $\sigma^2$ è

$$\ell_*(\sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} - \frac{k}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{k} x_j^2\right) ,$$

da cui si ricava che lo stimatore di massima verosimiglianza di $\sigma^2$ è

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n+k}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{k} x_j^2\right) .$$

Per $a = 2$ e i campioni $x$ e $y$ osservati, risulta $\hat{\sigma}^2 = 6.274$.

3. La derivata seconda della log-verosimiglianza per $\sigma^2$ è

$$\ell_{**}(\sigma^2) = \frac{n+k}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{k} x_j^2\right) .$$

Essendo $\ell_{**}(\hat{\sigma}^2) = -(n+k)/(2\hat{\sigma}^4) < 0$, $\hat{\sigma}^2$ è un punto di massimo.

**Esercizio 2.3.**

Il parametro su cui si desidera fare inferenza è $\psi = \psi(\lambda) = F(1;\lambda) = 1 - \exp(-\lambda)$.

1. La stima di massima verosimiglianza per $\lambda$ è $\hat{\lambda} = 1/\bar{y} = 0.181$. Poichè $\psi(\lambda)$ è una trasformazione biettiva del parametro, con inversa $\lambda = \lambda(\psi) = -\log(1-\psi)$, la stima di massima verosimiglianza di $\psi$ è $\hat{\psi} = \psi(\hat{\lambda}) = 1 - \exp(-\hat{\lambda}) = 0.17$.

2. Si indichi con $\mu = \mu(\lambda) = 1/\lambda$ la media della distribuzione esponenziale. Poichè $\bar{Y}$ ha distribuzione approssimata $N(\mu, \hat{\mu}^2/n)$, con $\hat{\mu} = \bar{y}$, un intervallo di confidenza per $\mu$ con livello approssimato 0.90 è

$$\left(\bar{y} \pm z_{0.95}\sqrt{\frac{\bar{y}^2}{n}}\right) = (5.5 \pm 1.64 \times 1.74) = (2.64, 8.35) \ .$$

Poichè $\lambda = \lambda(\mu) = 1/\mu$, un intervallo di confidenza per $\lambda$ con livello approssimato 0.90 è $(1/8.35, 1/2.64) = (0.12, 0.38)$. Infine, poichè $\psi = \psi(\lambda) = 1 - \exp(-\lambda)$, un intervallo di confidenza con livello approssimato 0.90 per $\psi$ è

$$(1 - \exp(-0.12), 1 - \exp(-0.38)) = (0.11, 0.32) \ .$$

**Esercizio 2.4.**

1. Per ipotesi, $Y \sim Bi(n, \pi)$ con $\pi = 0.5 - \theta$. La funzione di log-verosimiglianza per $\pi$ è $\ell(\pi) = y \log \pi + (n - y)\log(1 - \pi)$, e la funzione punteggio per $\pi$ è

$$\ell_*(\pi) = \frac{y}{\pi} - \frac{n - y}{1 - \pi} \ .$$

Lo stimatore di massima verosimiglianza per $\pi$ è $\hat{\pi} = y/n$, mentre quello per $\theta = \theta(\pi)$ è $\hat{\theta} = \theta(\hat{\pi}) = 0.5 - y/n$. Il valore atteso di $\hat{\theta}$ è

$$E_\theta(\hat{\theta}) = 0.5 - E_\pi(\hat{\pi}) = 0.5 - \frac{E_\pi(Y)}{n} = 0.5 - \pi \ ,$$

mentre la varianza è

$$V_\theta(\hat{\theta}) = V_\pi(\hat{\pi}) = \frac{V_\pi(Y)}{n} = \frac{\pi(1 - \pi)}{n} \ .$$

2. Per $n = 100$ e $y = 40$, risulta $\hat{\theta} = 0.1$.

3. Un intervallo di confidenza per $\pi$ con livello approssimato 0.99 è

$$\left(\hat{\pi} \pm z_{0.995}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1 - \hat{\pi})}{n}}\right) = (0.4 \pm 2.58 \times 0.05) = (0.27, 0.53) \ .$$

Poichè $\theta = \theta(\pi) = 0.5 - \pi$, un intervallo di confidenza per $\theta$ con livello approssimato 0.99 è

$$(0.5 - 0.53, 0.5 - 0.27) = (-0.03, 0.23) \ .$$

4. Il problema è equivalente alla verifica di $H_0 : \pi = \pi_0 = 0.5$ contro $H_1 : \pi \neq 0.5$. Per tale verifica, il valore osservato della funzione test $T = (\hat{\pi} - \pi_0)/\sqrt{\pi_0(1 - \pi_0)/n}$ è $t^{oss} = -2$. Con $\alpha$ fissato, un test bilaterale basato su $T$ rifiuta $H_0$ se $|t^{oss}| > z_{1-\alpha/2}$. Per $\alpha = 0.01$ e $z_{0.995} = 2.58$, risulta $|t^{oss}| = |-2| < 2.58$ e l'ipotesi nulla non viene rifiutata al livello 0.01.