Inferenza Statistica II

A.A. 2002-2003 **Homework 3**

Esercizio 3.1. Sia $y = (y_1, \dots, y_n)$ un campione casuale semplice da una variabile casuale con distribuzione $N(a\mu, \sigma_0^2)$, dove a e σ_0^2 sono costanti note (si veda l'Esercizio 2.1).

1 Si determinino l'informazione osservata e attesa per μ.

2 Si determini la distribuzione approssimata di $\hat{\mu}$. È esatta? (si confronti con l'Esercizio 2.1, punto 3).

3 Si verificare l'ipotesi nulla $H_0 : \mu = \mu_0 = 7$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \mu < \mu_0 = 7$ se $a = 2$, $\sigma_0^2 = 15$ e

$$y = (13.2, 8.2, 10.9, 14.3, 10.7, 6.6, 9.5, 10.8, 8.8, 13.3)\,.$$

Si calcoli il livello di significatività osservato e si dica se H_0 viene accettata o rifiutata con livello fissato $\alpha = 0.05$.

Esercizio 3.2. Siano $(y_1, \dots, y_n)$ determinazioni indipendenti di una variabile casuale con distribuzione $N(0, \sigma^2)$ e $(x_1, \dots, x_k)$ determinazioni indipendenti, tra di loro e dalle precedenti, di una variabile casuale con distribuzione $N(0, a\sigma^2)$, dove a è una costante nota e positiva (si veda l'Esercizio 2.2).

1 Si determinino l'informazione osservata e attesa per σ^2.

2 Si determini la distribuzione approssimata di $\hat{\sigma}^2$.

3 Si calcoli un intervallo di confidenza con livello approssimato $1-\alpha = 0.95$ per σ^2 se

$$\begin{aligned} y &= (2.6, -2.4, 0.3, 3.7, 0.1, -4.0, -1.1, 0.2, -1.8, 2.7)\,, \\ x &= (-3.9, 5.0, -5.2, 0.5) \end{aligned}$$

e $a = 2$, utilizzando il risultato del punto 2.
In base a questo intervallo di confidenza, è possibile dire se si rifiuta l'ipotesi nulla $H_0 : \sigma^2 = 1$ contro l'ipotesi alternativa $H_1 : \sigma^2 \neq 1$, con livello fissato $\alpha = 0.05$?

Esercizio 3.3. Con una moneta, non necessariamente regolare, risulta

$$\Pr(\text{Testa}) = \pi = 0.5 - \theta \qquad \text{e} \qquad \Pr(\text{Croce}) = 1 - \pi = 0.5 + \theta$$

con $-0.5 < \theta < 0.5$.

1 Si calcoli l'informazione osservata per θ.

2 Si calcoli l'informazione attesa per θ.

3 Con $n = 100$ e $y = 40$, si costruisca un intervallo di confidenza per θ di livello 0.99 basato sulla distribuzione approssimata dello stimatore di massima verosimiglianza.

4 Con $n = 100$ e $y = 40$, si verifichi $H_0 : \theta = 0$ contro $H_1 : \theta \neq 0$ con un livello $\alpha = 0.01$, utilizzando la distribuzione approssimata dello stimatore di massima verosimiglianza.

Esercizio 3.4. Si consideri il modello $p(y; \omega, \alpha) = \alpha\omega^\alpha / y^{\alpha+1}$, con $\alpha > 0$ e $x \geq \omega > 0$, che in economia è spesso utilizzato per rappresentare in maniera adeguata la distribuzione dei redditi che superano un certo tetto ω. Si assuma che il tetto ω sia fissato ad un valore noto ω_0. Si assuma inoltre di disporre di un campione casule semplice di numerosità n.

1 Si calcoli la stima di massima verosimiglianza di α.

2 Si calcoli l'informazione osservata per α.

3 Si calcoli l'informazione attesa per α.

4 Si costruisca un intervallo di confidenza per α con livello 0.95 basato sulla distribuzione approssimata dello stimatore di massima verosimiglianza.

Esercizio 3.5. Si consideri il modello statistico relativo al Lucido 1 della Lezione 3 (distribuzione $Bi(10, \pi), \pi \in \{0.1, 0.5, 0.8\}$).

1 Si calcoli la stima di massima verosimiglianza $\hat{\pi}(y)$ al variare di y in $\mathcal{Y} = \{0, \ldots, 10\}$.

2 Si calcoli la distribuzione della variabile casuale $\hat{\pi} = \hat{\pi}(Y)$ quando il vero valore del parametro è 0.1.

3 Si calcoli il valore atteso della variabile casuale $\hat{\pi}(Y)$ quando $\pi = 0.1$ e si dica se lo stimatore può essere non distorto.