INFERENZA STATISTICA II

Prova d'esame del 20 novembre 2001

1. Siano $y_1, \ldots, y_{20}$ il numero di reclami da parte di clienti pervenuti alla direzione di un grande magazzino in 20 giorni lavorativi fissati nell'arco di un trimestre. In particolare, il numero totale di reclami è risultato $\sum_{i=1}^{20} y_i = 183$. Si assuma che $y_1, \ldots, y_{20}$ sia un campione casuale semplice da una variabile casuale avente distribuzione di Poisson con media $\lambda > 0$.

   (a) Si scriva la funzione di log-verosimiglianza per λ.

   (b) Si ottenga lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\lambda}$ per λ e se ne calcoli il valore per i dati osservati.

   (c) Si determinino l'informazione osservata ed attesa per λ.

   (d) Si ottenga un'approssimazione per la distribuzione di $\hat{\lambda}$.

   (e) Si sfrutti l'approssimazione ottenuta in (d) per determinare un intervallo di confidenza per λ con livello approssimato 0.95.

   (f) Si verifichi $H_0 : \lambda = 10$ contro $H_1 : \lambda \neq 10$ al livello di significatività 0.05, utilizzando la statistica $W(\lambda)$.

   (g) Si calcoli un'approssimazione del livello di significatività osservato del test ottenuto al punto (f).

2. Un'azienda produttrice di computer è interessata a valutare quanto l'esperienza lavorativa dei propri addetti influenzi la produttività. L'azienda ritiene che un addetto senza esperienza sia in grado di assemblare circa 80 computer al giorno. Per valutare l'effetto dell'esperienza lavorativa, per un campione di 9 addetti con esperienza, sia y_i, $i = 1, \dots, 9$, l'eccedenza, rispetto a 80, di computer assemblati in media giornalmente nell'ultimo mese. Sia inoltre x_i la corrispondente esperienza lavorativa, in anni. I dati ottenuti sono i seguenti:

y_i	30	25	35	47	18	23	7	28	32
x_i	15.1	7.0	18.6	23.7	11.5	16.4	6.3	15.4	19.9

In particolare, si ha $\sum_{i=1}^9 y_i = 245$, $\sum_{i=1}^9 x_i = 133.9$, $\sum_{i=1}^9 y_i^2 = 7669$, $\sum_{i=1}^9 x_i^2 = 2258.73$, $\sum_{i=1}^9 x_i y_i = 4089.2$.

Si assuma che $y_1, \dots, y_9$ siano realizzazioni di variabili casuali indipendenti $N(\beta x_i, \sigma^2)$, con x_i costanti fissate, $\beta \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$.

(a) Si scrivano le funzioni di verosimiglianza e log-verosimiglianza per $\theta = (\beta, \sigma^2)$.

(b) Si ottenga lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\theta}$ per θ e se ne calcoli il valore per i dati osservati.

(c) Si determini l'informazione osservata per θ e si verifichi che

$$j(\hat{\theta})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.013 & 0 \\ 0 & 194.045 \end{pmatrix}.$$

(d) Si determini la distribuzione approssimata di $\hat{\theta}$ e della componente $\hat{\beta}$.

(e) Si calcoli un intervallo di confidenza per β con livello approssimato 0.95, basato sulla distribuzione approssimata di $\hat{\beta}$.

(f) Si verifichi $H_0 : \beta = 0$ contro $H_1 : \beta \neq 0$ al livello di significatività 0.05, utilizzando la statistica $W_P(\beta)$.

(g) Si calcoli un'approssimazione del livello di significatività osservato del test ottenuto al punto (f).

(h) Si ottenga l'espressione dell'intervallo di confidenza con livello 0.95 per β basato su $W_P(\beta)$.