INFERENZA STATISTICA II
Prova d'esame del 21 febbraio 2002
Soluzione

Nota bene: Si danno qui solo i risultati per i singoli quesiti, sono omessi i passaggi, che naturalmente lo studente deve includere nel compito scritto d'esame.

ESERCIZIO 1

(a) $l(\lambda) = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} y_i = 25 \log \lambda - 91.03\lambda\,.$
$l_*(\lambda) = n/\lambda - \sum_{i=1}^{n} y_i = 25/\lambda - 91.03\,.$
$j(\lambda) = n/\lambda^2 = 25/\lambda^2\,.$

(b) $\hat{\lambda} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} y_i}\,, \qquad \hat{\lambda} = \hat{\lambda}(y^{oss}) = \dfrac{25}{91.03} \doteq 0.27\,.$

(c) Sia $\psi = Pr_\lambda(Y_i > 10) = \exp(-10\lambda)$. Risulta $\hat{\psi} = \exp(-10\hat{\lambda}) \doteq 0.064$.

(d) $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(Y) \dot{\sim} N(\lambda, j\,(\hat{\lambda})^{-1})\,,$ sotto λ, ossia $\hat{\lambda} \dot{\sim} N(\lambda, 0.003)\,,$ sotto λ.

(e) $\hat{\lambda} \pm 1.96\sqrt{j(\hat{\lambda})^{-1}}\,,$
ossia $0.27 \pm 1.96\sqrt{0.003}$ che dà l'intervallo $(0.167, 0.382)$.

(f) $W(\lambda)\Big|_{\lambda=1/4} = 2\left(25 \log \frac{\hat{\lambda}}{1/4} - 91.03(\hat{\lambda} - 1/4)\right) \doteq 0.21.$
Poiché risulta $0.21 < \chi^2_{1;0.90} = 2.71$, l'ipotesi nulla viene accettata al livello 0.1.

(g) $\alpha^{oss} \doteq 0.65$. Con le tavole, $\alpha^{oss} \in (0.5, 0.8)$.

ESERCIZIO 2

(a) $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = (2, -2)$.

(b) $W_P(\theta_2)\Big|_{\theta_2=-4} = 2\left[l(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) - l(\hat{\theta}_{1_0}, -4)\right]\,,$
con $\hat{\theta}_{1_0}$ stima di massima verosimiglianza di θ_1 sotto H_0.
Risulta $\hat{\theta}_{1_0} = 2$
e dunque $W_P(\theta_2)\Big|_{\theta_2=-4} = 2(17.5 - 16.5) = 2.$
Poiché $2 < \chi^2_{1;0.95} = 3.84$, l'ipotesi nulla viene accettata.

(c) $\alpha^{oss} = 0.157$. Con le tavole, $\alpha^{oss} \in (0.1, 0.2)$.

(d) L'intervallo è ottenuto come $\hat{\Theta}_2(y) = \{\theta_2 : W_P(\theta_2) < 3.84\}$,

con

$$W_{P}(\theta_2) = 2\left[17.5 - l(\hat{\theta}_{1_{\theta_2}}, \theta_2)\right] ,$$

dove $\hat{\theta}_{1_{\theta_2}}$ è la stima di massima verosimiglianza di θ_1 con θ_2 fissato.

$\hat{\theta}_{1_{\theta_2}}$ è pari a 2 per θ_2 uguale a -5, -4, e -2;
è pari a 3 per $\theta_2 = -3$;
è pari a 0 per $\theta_2 = -1$
ed è pari a 1 per θ_2 uguale a 0 e a -1.

Si ottiene per l'intervallo l'espressione semplificata

$$\left\{\theta_2 \,:\, l(\hat{\theta}_{1_{\theta_2}}) \geq 15.58\right\} .$$

che dà $\hat{\Theta}_2(y) = \{-1, -2, -3, -4\}$.